

*Band  
17*

Bianca Krol (Hrsg.)

*Eignung von Varianz-Kovarianz-Ansätzen  
und Copula-Modellen zur Risikoaggregation  
in bankaufsichtlichen Risikotragfähigkeits-  
konzepten*

~  
Marc-Philip Graalmann, Frank Lehrbass

ifes Schriftenreihe

**FOM**  
Hochschule

ifes

Institut für Empirie & Statistik  
der FOM Hochschule  
für Oekonomie & Management

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© 2018 by



**Akademie  
Verlags- und Druck-  
Gesellschaft mbH**

MA Akademie Verlags- und Druck-Gesellschaft mbH  
Leimkugelstraße 6, 45141 Essen  
[info@mav-verlag.de](mailto:info@mav-verlag.de)

Das Werk einschließlich seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urhebergesetzes ist ohne Zustimmung der MA Akademie Verlags- und Druck-Gesellschaft mbH unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürfen. Oft handelt es sich um gesetzlich geschützte eingetragene Warenzeichen, auch wenn sie nicht als solche gekennzeichnet sind.

Marc-Philip Graalmann, Frank Lehrbass

Eignung von Varianz-Kovarianz-Ansätzen und Copula-Modellen  
zur Risikoaggregation in bankaufsichtlichen Risikotragfähigkeitskonzepten

ifes Institut für Empirie & Statistik  
der FOM Hochschule für Oekonomie & Management

ifes Schriftenreihe  
Band 17, 2018

ISBN (Print) 978-3-89275-409-1  
ISBN (eBook) 978-3-89275-410-7

ISSN (Print) 2191-3366  
ISSN (eBook) 2569-5355

## Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis .....	V
Tabellenverzeichnis .....	VI
Abkürzungsverzeichnis .....	VII
Formelverzeichnis .....	VIII
Symbolverzeichnis .....	IX
1 Vom Bestreben Risikokapital zu sparen .....	13
2 Abhängigkeitsmodellierung als Grundlage der Risikoaggregation .....	16
2.1 Aus der Unabhängigkeit der Risikoarten entstehende Diversifikationseffekte .....	16
2.2 Lineare Korrelation nach Bravais-Pearson .....	18
2.3 Rangkorrelationen .....	19
2.3.1 Spearmans Rangkorrelationskoeffizient .....	20
2.3.2 Kendalls Tau .....	21
2.4 Copulas .....	22
2.4.1 Hintergrund der Copula-Theorie .....	22
2.4.2 Copula Schranken .....	23
2.4.3 Randabhängigkeiten .....	25
2.4.4 Abhängigkeitsstrukturen ausgewählter Copula-Familien .....	26
2.5 Stabilität der Abhängigkeiten im Zeitverlauf .....	30
3 Aufsichtliche Anforderungen an die ökonomische Kapitalausstattung eines Kreditinstitutes .....	33
3.1 Bankaufsichtliche Risikotragfähigkeitskonzepte .....	33
3.2 Quantifizierung von wesentlichen Risiken .....	35
3.2.1 Value-at-Risk .....	36
3.2.2 Expected Shortfall .....	38
3.3 Anforderungen an die Risikoaggregation .....	39
4 Konzepte zur Aggregation von Risiken .....	43
4.1 Varianz-Kovarianz-Ansätze .....	44
4.1.1 Methodische Voraussetzungen .....	45
4.1.2 Einsatz unter Berücksichtigung der aufsichtlichen Anforderungen .....	47
4.1.3 Vorzüge und Probleme der Varianz-Kovarianz-Ansätze .....	48
4.2 Copula-Modelle .....	50
4.2.1 Auswahl einer Copula-Funktion .....	51
4.2.2 Parametrisierung der Copula-Funktion unter Berücksichtigung der aufsichtlichen Anforderungen .....	54
4.2.3 Vorzüge und Probleme der Copula-Modelle .....	57

5	Stresstestsimulationsstudie .....	60
5.1	Literaturüberblick .....	60
5.2	Untersuchungsdesign .....	63
5.3	Auswahl des Stresstestszenarios.....	67
5.4	Verwendete Verteilungsfunktionen der Risikoarten .....	68
5.4.1	Adressenausfallrisiko .....	68
5.4.2	Marktpreisrisiko .....	70
5.4.3	Operationelle Risiko .....	71
5.5	Darstellung der Ergebnisse .....	73
5.5.1	Sensitivität gegenüber Veränderungen des Konfidenzniveaus...78	
5.5.2	Sensitivität gegenüber Veränderungen der Risikoanteile .....	82
5.5.3	Sensitivität gegenüber Veränderungen der Standardabweichungen .....	88
5.6	Schlussfolgerungen für die Auswahl eines Aggregationskonzeptes .....	94
6	Zusammenfassung und Fazit.....	98
	Literaturverzeichnis.....	100

## Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1:	Systematisches und unsystematisches Risiko in der Portfoliotheorie .....	17
Abbildung 2:	Schranken der bivariaten Copula im Einheitskubus.....	25
Abbildung 3:	Streudiagramme und Dichten der bivariaten Gauß- und t-Copula .....	28
Abbildung 4:	Streudiagramme und Dichten der bivariaten Gumbel- und Clayton-Copula .....	30
Abbildung 5:	Visualisierung des VaR in einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion .....	37
Abbildung 6:	Konturdiagramme der kumulierten Verteilungsfunktionen...	68
Abbildung 7:	Wahrscheinlichkeitsdichte des Adressenausfallrisikos.....	70
Abbildung 8:	Wahrscheinlichkeitsdichte des Marktpreisrisikos.....	71
Abbildung 9:	Wahrscheinlichkeitsdichte des operationellen Risikos.....	73
Abbildung 10:	Abweichung der VaR-Schätzer bei unterschiedlichen Konfidenzniveaus .....	78
Abbildung 11:	Abweichungen der ES-Schätzer bei unterschiedlichen Konfidenzniveaus .....	80
Abbildung 12:	Empirische Gesamtrisikoverlustverteilung der Ausgangszeitreihe .....	82
Abbildung 13:	Abweichung 99,9 % VaR-Schätzer bei unterschiedlichen Marktpreisrisikoanteilen (Anteil des operationellen Risikos c.p. 67 %).....	83
Abbildung 14:	Abweichung 99,9 % VaR-Schätzer bei unterschiedlichen Anteilen des operationellen Risikos (Verhältnis Adressenausfall- und Marktpreisrisiko c.p.) .....	86
Abbildung 15:	Abweichung 99,9 % VaR-Schätzer bei unterschiedlichen Ausfallwahrscheinlichkeiten (Ausfallkorrelation konstant bei 10 %) .....	89
Abbildung 16:	Abweichung 99,9 % VaR-Schätzer bei unterschiedlichen Standardabweichungen des Marktpreisrisikos .....	91
Abbildung 17:	Abweichung 99,9 % VaR-Schätzer bei unterschiedlichen Schadensstandardabweichungen .....	93

## Tabellenverzeichnis

Tabelle 1:	Zusammenfassende Gegenüberstellung von Varianz-Kovarianz-Ansätzen und Copula-Modellen .....	59
Tabelle 2:	Aggregierte Risikomaße (Zeithorizont 1 Jahr) und relative Abweichung der Schätzer gegenüber Risikomaß der Ausgangszeitreihe .....	74
Tabelle 3:	Einsparpotential gegenüber der einfachen Addition.....	77

## Abkürzungsverzeichnis

AMA	Advanced Measurement Approach; Fortgeschrittener Ansatz zur Bestimmung der Mindestkapitalanforderung für das operationelle Risiko nach CRR
BaFin	Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht
BCBS	Basel Committee on Banking Supervision (Basler Ausschuss für Bankenaufsicht)
BofA ML Corporate	Bank of America Merrill Lynch Corporate Index
CEBS	Committee of European Banking Supervisors (Ausschuss der Europäischen Aufsichtsbehörden für das Bankwesen; Vorgänger der EBA)
CRR	Capital Requirements Regulation (Kapitaladäquanzverordnung)
CRD IV	Capital Requirements Directive IV (Eigenkapitalrichtlinie)
DAX	Deutscher Aktien Index
DCC-Modell	Dynamic-Conditional-Correlation-Modell
EBA	European Banking Authority (Europäische Bankenaufsichtsbehörde)
EWMA-Modell	Exponentially-Weighted-Moving-Average-Modell
EZB	Europäische Zentralbank
ES	Expected Shortfall
FMA	Österreichische Finanzmarktaufsicht
IRB-Ansatz	Auf internen Ratings basierender Ansatz zur Bestimmung der Mindestkapitalanforderung für das Kreditrisiko nach der CRR
KWG	Kreditwesengesetz
MaRisk	Mindestanforderungen an das Risikomanagement
ÖNB	Österreichische Nationalbank
RexP	Rentenperformance Index
SREP	Supervisory Review and Evaluation Process (Aufsichtlicher Überprüfungs- und Bewertungsprozess)
Tz.	Textziffer
VaR	Value-at-Risk
VKA	Varianz-Kovarianz-Ansatz



## Formelverzeichnis

Formel 1:	Berechnung des Korrelationskoeffizienten nach Bravais-Pearson	18
Formel 2:	Berechnung der Stichprobenkorrelation.....	19
Formel 3:	Stichprobenschätzer des Spearmans Rangkorrelationskoeffizienten .....	20
Formel 4:	Kendalls Tau. ....	21
Formel 5:	Stichprobenschätzer Kendalls Tau .....	21
Formel 6:	Multivariate Verteilungsfunktion H .....	22
Formel 7:	Fréchet-Hoeffding-Schranken .....	24
Formel 8:	Randabhängigkeitskoeffizienten .....	26
Formel 9:	Explizite Formel für Generierung von Copulas.....	26
Formel 10:	Gauß-Copula .....	27
Formel 11:	t-Copula .....	27
Formel 12:	Archimedische Copula-Funktionen.....	29
Formel 13:	Berechnung des Value-at-Risk .....	37
Formel 14:	Berechnung des Expected Shortfall .....	39
Formel 15:	Risikoaggregation im Varianz-Kovarianz-Ansatz .....	44
Formel 16:	Spezialfälle des Varianz-Kovarianz-Ansatzes .....	45
Formel 17:	Aggregation der simulierten Verluste im Copula-Modell.....	51
Formel 18:	Mixture-Copula aus t- und Gumbel-Copula.....	53
Formel 19:	Zusammenhang zwischen Spearmans Rangkorrelationskoeffizient und Korrelation der Gauß-Copula.....	55
Formel 20:	Zusammenhang zwischen Kendalls Tau und Korrelation der t-Copula .....	55
Formel 21:	Zusammenhang zwischen Kendalls Tau und Generatorparameter der bivariaten Gumbel-Copula .....	56
Formel 22:	Zusammenhang zwischen Kendalls Tau und Generatorparameter der bivariaten Clayton-Copula .....	56
Formel 23:	Ungünstigste Ausfallrate aus dem Vasicek-Modell.....	69
Formel 24:	Portfolioverlust aus dem Adressenausfallrisiko.....	69
Formel 25:	Dichtefunktion des Marktpreisrisikos.....	71
Formel 26:	Dichtefunktion des operationellen Risikos.....	72

## Symbolverzeichnis

$\sum_{i=1}^n (\cdot)$	Summenzeichen (Summe aller $i = 1$ bis $n$ Elemente)
$\binom{n}{k}$	Binomialkoeffizient ( $n$ über $k$ )
$\int_a^b f(x) dx$	Integral zwischen $a$ und $b$ der Funktion $f(x)$ abgeleitet nach $x$ .
$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$	Matrix
$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}^T$	Transponierter Vektor
$x \rightarrow a$	$x$ konvergiert gegen $a$
$\infty$	Unendlich
$x \in A$	$x$ Element aus $A$
$[a, b]$	Abgeschlossenes Intervall $\{x \in \mathbb{R}   a \leq x \leq b\}$
$[a, b[$	Rechtsoffenes Intervall $\{x \in \mathbb{R}   a \leq x < b\}$
$]a, b]$	Linksoffenes Intervall $\{x \in \mathbb{R}   a < x \leq b\}$
$]a, b[$	Offenes Intervall $\{x \in \mathbb{R}   a < x < b\}$
$(x   \cdot)$	$x$ unter der Bedingung das ...
$a \approx b$	$a$ ungefähr gleich $b$
Griechische Buchstaben	
$\alpha$	Konfidenzniveau
$\Gamma(\cdot)$	Gamma-Funktion
$\gamma(\cdot)$	Generatorfunktion einer archimedischen Copula
$\gamma^{-1}(\cdot)$	Inverse der Generatorfunktion einer archimedischen Copula
$\theta$	Generatorparameter einer archimedischen Copula-Funktion
$\hat{\theta}$	Schätzer für Generatorparameter einer archimedischen Copula
$\lambda_l$	unterer Randabhängigkeitskoeffizient (lower tail dependence coefficient)
$\lambda_u$	oberer Randabhängigkeitskoeffizient (upper tail dependence coefficient)
$\mu$	Lageparameter
$\nu$	Freiheitsgrade

$\pi$	Kreiszahl Pi
$\rho$	Korrelationskoeffizient nach Bravais-Pearson
$\hat{\rho}$	Schätzer für Korrelationskoeffizient nach Bravais-Pearson
$\rho_S$	Spearman's Korrelationskoeffizient
$\hat{\rho}_S$	Stichprobenschätzer für Spearman's Korrelationskoeffizienten
$\sigma$	Standardabweichung
$\tau$	Kendalls Tau
$\hat{\tau}$	Stichprobenschätzer für Kendalls Tau
$\Phi$	Verteilungsfunktion der Normalverteilung
$\Phi^{-1}$	Quantilfunktion (inverse Verteilungsfunktion) der Normalverteilung
$\Phi_R$	Multivariate Normalverteilung mit Korrelationsmatrix $R$

#### Lateinische Buchstaben

$ac$	Ausfallkorrelation im Vasicek-Modell
$C(\cdot)$	Copula-Funktion
$C_{\theta}^A(\cdot)$	Archimedische Copula-Funktion mit Generatorparameter $\theta$
$C_{\theta}^{Cl}(\cdot)$	Clayton-Copula mit Generatorparameter $\theta$
$C_{\theta}^G(\cdot)$	Gumbel-Copula mit Generatorparameter $\theta$
$C_l(\cdot)$	Untere Copula-Schranke
$C_u(\cdot)$	Obere Copula-Schranke
$C_{\nu,R,\theta}^M(\cdot)$	Mixture-Copula mit Eingangsparametern $\nu, R$ und $\theta$
$C_R^N(\cdot)$	Gauß-Copula mit Korrelationsmatrix $R$
$C_{\nu,R}^t(\cdot)$	t-Copula mit $\nu$ Freiheitsgraden und Korrelationsmatrix $R$
$c$	Anzahl konkordanter Paare
$Cov(\cdot)$	Kovarianz
$d$	Anzahl diskordanter Paare
$E(\cdot)$	Erwartungswert
$EaD$	Exposure at Default (Kredithöhe bei Ausfall)
$ES(\cdot)$	Expected Shortfall

$exp(\cdot)$	natürliche Exponentialfunktion
$F(x)$	univariate Verteilungsfunktion
$F^{-1}(\cdot)$	Quantilfunktion (inverse Verteilungsfunktion)
$f(x)$	Funktion von $x$
$G$	Gesamtbank-Risikomaß
$H(\cdot)$	Multivariate Verteilungsfunktion
$i$	Zählvariable
$\inf\{\cdot\}$	Infimum (größte untere Schranke)
$j$	Zählvariable
$K$	Risikokennzahl einer Risikoart
$LGD$	Loss Given Default (Verlustrate bei Ausfall)
$\ln(\cdot)$	natürlicher Logarithmus
$\lim_{x \rightarrow a}(\cdot)$	Grenzwertbetrachtung wenn $x$ gegen $a$ konvergiert
$\max(a, b)$	Maximum der Zahlen $a$ und $b$
$\min(a, b)$	Minimum der Zahlen $a$ und $b$
$n$	Gesamtanzahl der Beobachtungen/vorhandenen Paare/ Variablen
$P(\cdot)$	Wahrscheinlichkeit
$PD$	Ausfallwahrscheinlichkeit
$\widetilde{L}$	Aus der Copula-Funktion simulierter Gesamtbankportfolio- verlust
$PL_A$	Portfolioverlust aus dem Adressenausfallrisiko
$PL_O$	Portfolioverlust aus dem operationellen Risiko
$Q$	Zufallsvariable $Q$
$R$	Korrelationsmatrix
$rg(\cdot)$	Rangzahl
$\bar{r}_g$	Mittelwerte der Ränge
$s$	Skalierungsparameter

$\sin(\cdot)$	Sinusfunktion
$\sin^{-1}(\cdot)$	Umgekehrte Sinusfunktion (Arkussinus)
$T$	Zeithorizont
$T_{\nu,R}$	Multivariate t-Verteilungsfunktion mit $\nu$ Freiheitsgraden und Korrelationsmatrix $R$
$t_{\nu}^{-1}$	Inverse der univariaten t-Verteilungsfunktion mit $\nu$ Freiheitsgraden
$U$	Gleichverteilte Zufallsvariable im abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$
$u_i$	$i$ -te Realisierung der Zufallsvariable $U$
$\tilde{u}$	Aus Copula-Funktion über Monte-Carlo-Simulation resultierende Zufallsvariable
$VaR(\cdot)$	Value-at-Risk
$Var(\cdot)$	Varianz
$w$	Gewichtungsfaktor in Mixture-Copula
$WCDR(T, \alpha)$	Ungünstigste Ausfallrate (Worst Case Default Rate) aus dem Vasicek-Modell für den Zeithorizont $T$ und das Konfidenzniveau $\alpha$
$X$	Zufallsvariable $X$
$x_i$	$i$ -te Realisierung der Zufallsvariablen $X$
$\bar{x}$	Arithmetisches Mittel von $x$
$Y$	Zufallsvariable $Y$
$y_i$	$i$ -te Realisierung der Zufallsvariablen $Y$
$\bar{y}$	Arithmetisches Mittel von $y$
$z$	Variable $z$

## 1 Vom Bestreben Risikokapital zu sparen

Das Eingehen von Risiken ist untrennbar mit dem Geschäftsmodell eines Kreditinstitutes verbunden. Insbesondere bei der Kreditvergabe besteht die Gefahr, dass der Schuldner das geliehene Geld nicht zurückzahlen kann. Weitere Risiken entstehen aus der Änderung von Marktparametern (z. B. Zinssätzen oder Marktkursen), die mit einer Wertänderung des Bankportfolios einhergehen, oder aus dem operativen Geschäft wie bspw. dem Risiko von Betrugshandlungen. Wenn sich ein Risiko materialisiert, geht dies mit einem Verlust des von der Bank eingesetzten Kapitals einher.

Schon aus ökonomischer Sicht kann ein Kreditinstitut nicht in unbegrenztem Maße Geschäfte bzw. damit verbundene Risiken eingehen, da das Kapital als Verlustauffangpuffer nicht in unbegrenzter Höhe zur Verfügung steht. Es besteht daher die Notwendigkeit, die eingegangenen Risiken zu quantifizieren und mit Kapital zu hinterlegen. Als gängige Praxis hat sich die isolierte Bestimmung der Risikohöhe pro Risikoart durchgesetzt.

Hieran schließt sich konzeptionell die Frage an, wie die für jede Risikoart einzeln bestimmten Risikobeträge zu einem Gesamtrisiko der Bank zusammengeführt werden können. Neben einer einfachen Addition der einzelnen Beträge gibt es Ansätze, die versuchen, Diversifikationseffekte bei der Risikoaggregation zu berücksichtigen. Wenn das Eintreten der Risiken unabhängig voneinander ist, ergibt sich so die Möglichkeit, dass der Gesamtrisikobetrag kleiner als die Summe der Risiken wird. Diese Risikoverringerung durch Diversifikation geht auf die Portfoliotheorie nach Markowitz aus dem Jahr 1952 zurück.<sup>1</sup>

In der wissenschaftlichen Literatur werden vor diesem Hintergrund immer wieder Artikel zur Risikoaggregation publiziert. *Kuritzkes et al.* konnten beispielsweise bei Nutzung eines Varianz-Kovarianz-Ansatzes Diversifikationseffekte in Höhe von 15 % beobachten.<sup>2</sup> In der Studie von *Dimakos und Aas* war das Gesamtrisiko beim Einsatz von Copula-Modellen um bis zu 20 % kleiner als bei der einfachen Addition der Einzelrisiken.<sup>3</sup> *Rosenberg und Schuermann* kamen in ihrer empirischen Studie sogar zu dem Ergebnis, dass die einfache Addition das Risiko im Vergleich zu einem Copula-Modell um mehr als 40 % überschätzt.<sup>4</sup>

---

<sup>1</sup> S. dazu: Markowitz, H., *Portfolio Selection*, 1952.

<sup>2</sup> Vgl. Kuritzkes, A. et al., *Capital Adequacy*, 2001, S. 22, 40.

<sup>3</sup> Vgl. Dimakos, X., Aas, K., *Risk modelling*, 2004, S. 266, 275 f.

<sup>4</sup> Vgl. Rosenberg, J., Schuermann, T., *Integrated Risk Management*, 2006, S. 612.

Diese Ergebnisse implizieren, dass durch die Verwendung der Aggregationsmodelle teures Kapital in einem erheblichen Umfang eingespart werden kann. Das mögliche Einsparpotential stellt regelmäßig einen großen Anreiz zur Nutzung der Modelle dar.

Diese Artikel vernachlässigen jedoch, dass Banken einer starken Regulierung unterliegen und bankaufsichtliche Vorgaben berücksichtigen müssen. So sind sie in der Wahl ihrer Methoden zur Risikoquantifizierung nicht vollkommen frei. Mögliche Einsparungen dürfen nicht auf einer Unterschätzung des Risikos beruhen und auch in Krisenzeiten muss genügend Kapital vorgehalten werden.

Diese Studie geht daher der Fragestellung nach, inwiefern sich die Varianz-Kovarianz-Ansätze und Copula-Modelle zur Risikoaggregation in bankaufsichtlichen Risikotragfähigkeitskonzepten eignen. Hierbei sollen im Gegensatz zu den dargestellten Studien explizit die aufsichtlichen Anforderungen an die Risikoaggregation berücksichtigt werden. Die Beurteilung erfolgt auf der modelltheoretischen Ebene und im Rahmen eines empirischen Stresstests.

Da die Modelle zur Risikoaggregation letztlich auf den Abhängigkeiten der einzelnen Risikoarten zueinander beruhen, werden zu Beginn die Konzepte zur Abhängigkeitsmodellierung dargestellt. Hierbei wird auch auf den ökonomischen Hintergrund der kapitalsparenden Diversifikationseffekte eingegangen. Anschließend werden die bankaufsichtlichen Anforderungen an die ökonomische Kapitalausstattung eines Kreditinstitutes aufgezeigt. Neben einer kurzen Vorstellung des Risikotragfähigkeitskonzeptes liegt der Schwerpunkt auf der Quantifizierung der wesentlichen Risiken und den regulatorischen Anforderungen an die Risikoaggregation.

Nach diesen Grundlagen werden die beiden Konzepte zur Risikoaggregation beleuchtet, wobei modellimmanente Vorzüge und Probleme aufgezeigt werden, um die modelltheoretische Validität zu beurteilen. Zudem wird die Vorgehensweise der Parametrisierung unter Berücksichtigung der aufsichtlichen Anforderungen erläutert. Im empirischen Teil der Arbeit werden die Aggregationsmodelle einem Stresstest unterzogen, um Aussagen zur Zuverlässigkeit und Stabilität der Modelle in Krisenzeiten zu erhalten. Hierzu wird ein Marktumfeld simuliert, in dem Risiken verstärkt gleichzeitig eintreten. Ziel ist es, Kapitaleinsparungen aufzudecken, die auf Unterschätzungen des tatsächlichen Risikos beruhen. Die Parametrisierung erfolgt dabei unter Berücksichtigung der höchsten beobachtbaren Abhängigkeiten, um die aufsichtliche Konservativitätsanforderung

zu erfüllen. Mit Hilfe von Sensitivitätsanalysen wird der Einfluss einzelner Variablen auf das Aggregationsergebnis untersucht, um Verzerrungen in den Ergebnissen auszuschließen. Außerdem wird das Einsparpotential unter Berücksichtigung der aufsichtlichen Anforderungen ausgelotet.



## 2 Abhängigkeitsmodellierung als Grundlage der Risikoaggregation

Wie bereits eingangs dargestellt, resultiert das Gesamtrisiko einer Bank aus unterschiedlichen Risikotreibern. Zwischen diesen Risikotreibern können Diversifikationseffekte auftreten, die risikomindernd wirken. Folglich kann das Gesamtrisiko geringer als die Summe der Einzelrisiken ausfallen, wenn im Rahmen der Risikoaggregation Diversifikationseffekte berücksichtigt werden. Zur Bestimmung der Höhe der Diversifikationseffekte werden Informationen über die Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Risikoarten benötigt. Risiken werden regelmäßig als Zufallsprozesse modelliert. Daher werden nach der Darstellung des ökonomischen Hintergrundes der Diversifikationseffekte die stochastischen Konzepte zur Messung der Stärke und Richtung von Abhängigkeiten zwischen Zufallsvariablen dargestellt, die in den Konzepten zur Risikoaggregation verwendet werden.<sup>5</sup>

### 2.1 Aus der Unabhängigkeit der Risikoarten entstehende Diversifikationseffekte

Sofern sich unterschiedliche Risikotreiber nicht vollständig identisch im Zeitverlauf verhalten, treten die einzeln berechneten Risiken nicht gleichzeitig in voller Höhe ein. Im besten Fall entwickeln sich die Positionen gegenläufig, sodass der Verlust in einer Risikoart mit einem Gewinn in einer anderen ausgeglichen werden kann. In diesem Fall ist das Gesamtrisiko regelmäßig kleiner als die Summe der einzelnen Risiken und das Kreditinstitut muss weniger ökonomisches Kapital zur Abdeckung vorhalten. Dieser Effekt beruht auf der Diversifikation. Das theoretische Fundament der Diversifikation wurde von Markowitz mit der Portfoliotheorie begründet. Markowitz' Theorie basiert auf der Erkenntnis, dass, während die erwarteten Erträge einzelner Wertpapiere unter Berücksichtigung ihres Anteils am Gesamtportfolio addiert werden können, zur Bestimmung des Portfoliorisikos eine einfache gewichtete Addition der Einzelrisiken (gemessen über die Varianz der Renditen) nicht ausreicht. Zusätzlich muss die Kovarianz als Abhängigkeitsmaß zwischen den Renditen der Wertpapiere berücksichtigt werden.<sup>6</sup>

---

<sup>5</sup> Vgl. Hannemann, R. et al., MaRisk-Kommentar, 2013, S. 232; Spielberg, H., Becher, F., Diversifikation, 2013, S. 30; Hull, J., Risikomanagement, 2016, S. 695.

<sup>6</sup> Vgl. Markowitz, H., Portfolio Selection, 1952, S. 80 f.; Hull, J., Risikomanagement, 2016, S. 342 ff.; Reuse, S., Diversifikationseffekte, 2016, S. 307.

Diversifikation kann bei Anwendung der Portfoliotheorie analog zum systematischen und unsystematischen (oder idiosynkratischen) Risiko in zwei Arten unterteilt werden. Das unsystematische Risiko stammt aus der Anlage in einen spezifischen Vermögensgegenstand (z. B. einer Unternehmensanleihe) und dem daraus resultierenden spezifischen Risiko (z. B. dem Adressenausfallrisiko eines bestimmten Unternehmens). Das unsystematische Risiko wird durch die Aufteilung des Portfolios auf unterschiedliche Adressen mit steigender Anzahl verringert (siehe durchgängige Kurve in Abbildung 1). Dies wird als Diversifikation innerhalb einer Risikoart bezeichnet (Intra-Risikodiversifikation). Das systematische Risiko stammt von einem gemeinsamen Risikotreiber, der alle Vermögensgegenstände des Portfolios gleichermaßen beeinflusst (z. B. makroökonomische Faktoren wie die konjunkturelle Lage). Dieses Risiko kann nicht durch die Erhöhung der Adressenanzahl in einem Portfolio verringert werden (siehe gestrichelte Linie in Abbildung 1).<sup>7</sup>

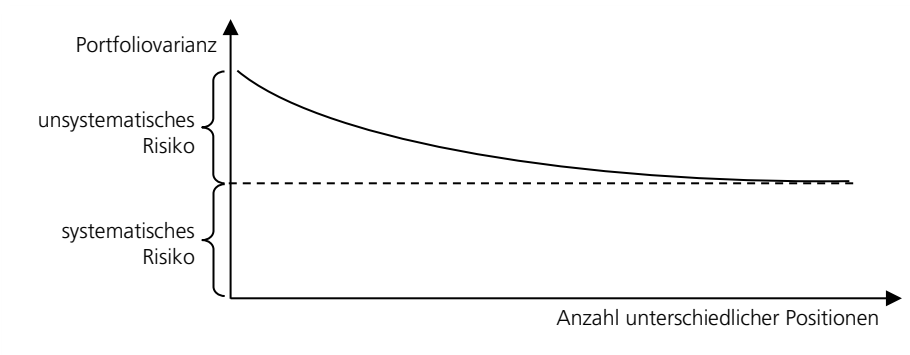


Abbildung 1: Systematisches und unsystematisches Risiko in der Portfoliotheorie

Eine zusätzliche Verringerung des Risikos auf Gesamtbankebene ist hingegen durch eine Investition in Vermögensgegenstände, die durch andere systematische Risikofaktoren beeinflusst werden, möglich. Hierbei wird eine Diversifikation zwischen den Risikoarten erzielt (Inter-Risikodiversifikation). Dieser Effekt wird insbesondere bei der nach Risikoart getrennten Risikoquantifizierung deutlich.<sup>8</sup> Nachfolgend fokussiert sich diese Studie auf die Inter-Risikodiversifikationseffekte.

<sup>7</sup> Vgl. BCBS, Risk Aggregation, 2010, S. 22; CEBS, Position Paper, 2010, S. 1; Mondello, E., Portfoliomanagement, 2015, S. 133 f.; Hull, J., Risikomanagement, 2016, S. 27, 37.

<sup>8</sup> Vgl. BCBS, Risk Aggregation, 2010, S. 22 ff.

Die Berücksichtigung von Diversifikationseffekten zwischen Risikoarten bei der Aggregation der einzeln bestimmten Risikobeträge in aufsichtlichen Risikotragfähigkeitskonzepten führt dazu, dass das niedrigere Gesamtrisiko mit weniger Risikodeckungspotential unterlegt werden muss.<sup>9</sup> Gerade Institute oder Institutgruppen mit heterogenen Geschäftstätigkeiten können besonders stark von Diversifikationseffekten zwischen ihren Einheiten profitieren. Gleichzeitig stehen sie aber auch vor einer größeren Herausforderung, ein angemessenes Aggregationsmodell zu implementieren. In einer Untersuchung des Baseler Ausschusses für Bankenaufsicht war insbesondere diese Gruppe von Instituten besonders an einer Aggregation der Risiken unter Hebung der Diversifikationseffekte interessiert.<sup>10</sup>

## 2.2 Lineare Korrelation nach Bravais-Pearson

Ein weit verbreitetes Abhängigkeitsmaß stellt der lineare Korrelationskoeffizient ( $\rho$ ) nach Bravais und Pearson dar. Dieser misst die Richtung und Stärke einer linearen Abhängigkeit zwischen zwei Zufallsvariablen. Er ist für zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  mit endlicher Varianz als die Kovarianz von  $X$  und  $Y$  dividiert durch die Wurzel aus der Varianz von  $X$  multipliziert mit der Varianz von  $Y$  definiert (siehe Formel 1):<sup>11</sup>

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}} = \frac{E((X-E(X)) \cdot (Y-E(Y)))}{\sqrt{\text{Var}(X)} \cdot \sqrt{\text{Var}(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X) \cdot E(Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)}. \quad (1)$$

Formel 1: Berechnung des Korrelationskoeffizienten nach Bravais-Pearson

Der Korrelationskoeffizient normiert die Kovarianz durch das Produkt der Standardabweichungen auf den Wertebereich  $-1 \leq \rho \leq 1$ . Es ist jedoch anzumerken, dass dieser Wertebereich abhängig von der zugrundeliegenden Verteilung nicht immer vollständig genutzt wird.<sup>12</sup> Bei völliger linearer Abhängigkeit zwischen  $X$  und  $Y$  gilt:  $|\rho| = 1$ .<sup>13</sup> Der Korrelationskoeffizient ist symmetrisch, daher gilt:  $\rho_{X,Y} = \rho_{Y,X}$ . Die Richtung des linearen Zusammenhangs (positive oder negative lineare Korrelation) wird durch das Vorzeichen von  $\rho$  angegeben. Bei  $\rho =$

<sup>9</sup> Vgl. Hannemann, R. et al., MaRisk-Kommentar, 2013, S. 232; Spielberg, H., Becher, F., Diversifikation, 2013, S. 30; Hull, J., Risikomanagement, 2016, S. 695.

<sup>10</sup> Vgl. BCBS, Risk Aggregation, 2010, S. 4.

<sup>11</sup> Vgl. Embrechts, P. et al., Dependence, 2002, S. 183; Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 250; Hlawatsch, S., Reichling, P., Copula, 2010, S. 2; Hull, J., Risikomanagement, 2016, S. 270.

<sup>12</sup> Für weitere Informationen siehe bspw.: Embrechts, P. et al., Dependence, 2002, S. 206 f.

<sup>13</sup> Für den Beweis hierzu siehe: Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 250 f.

0 liegen unkorrelierte Zufallsvariablen vor. Es besteht also keine lineare Abhängigkeit. Dies lässt aber keinen allgemeingültigen Schluss auf eine Unabhängigkeit der Zufallsvariablen zu. So beträgt der Korrelationskoeffizient zwischen der normalverteilten Zufallsvariable  $X$  und der Variable  $Y = X^2$  null, obwohl eine Abhängigkeit besteht. Die Umkehrung der Aussage ist hingegen möglich. Unabhängige Zufallsvariablen sind unkorreliert und weisen einen Korrelationskoeffizienten von null auf.<sup>14</sup>

Die Stichprobenkorrelation ( $\hat{\rho}_{X,Y}$ ) der  $n$  umfassenden Stichprobe  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  wird mit folgender Formel berechnet, wobei  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  die Stichprobenmittelwerte bezeichnen (siehe Formel 2):<sup>15</sup>

$$\hat{\rho}_{X,Y} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2\right) \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \bar{y}^2\right)}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \cdot \bar{y}^2\right)}} \quad (2)$$

Formel 2: Berechnung der Stichprobenkorrelation

Sofern die Zufallsvariablen multivariat normalverteilt sind, lässt sich die gesamte Abhängigkeitsstruktur durch den Korrelationskoeffizienten beschreiben. In diesem speziellen Fall gilt auch, dass unkorrelierte Zufallsvariablen stochastisch unabhängig sind. Bei Wegfall der multivariaten Normalverteilungsannahme ist nicht mehr sichergestellt, dass die Abhängigkeiten zwischen zwei Zufallsvariablen vollständig durch den Korrelationskoeffizienten erfasst werden.<sup>16</sup>

## 2.3 Rangkorrelationen

Bei der Rangkorrelation werden nicht die numerischen Werte, sondern die Ränge innerhalb der sortierten Daten betrachtet. Hierfür werden den zu untersuchenden Variablen getrennt voneinander Ränge (Platzzahlen) zugeordnet. Das Konzept der Rangkorrelationen basiert auf der Untersuchung, inwiefern sich eine Datenreihe mitordnet, wenn die andere Reihe aufsteigend anhand der Platzzahlen sortiert wird. Somit kann das gemeinsame Monotonieverhalten von zwei Zufallsvariablen beschrieben werden. Rangkorrelationen beschränken sich

<sup>14</sup> Vgl. Embrechts, P. et al., Dependence, 2002, S. 185; Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 251; Fahrmeir, L. et al., Statistik, 2011, S. 352 f.; Mai, J., Scherer, M., Abhängigkeiten, 2012, S. 9 f.

<sup>15</sup> Vgl. Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 252; Fahrmeir, L. et al., Statistik, 2011, S. 135 f.; Mai, J., Scherer, M., Abhängigkeiten, 2012, S. 9 f.

<sup>16</sup> Vgl. Embrechts, P. et al., Dependence, 2002, S. 185; Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 251, 254; Fahrmeir, L. et al., Statistik, 2011, S. 353; Mai, J., Scherer, M., Abhängigkeiten, 2012, S. 9 f.

dabei nicht auf die Messung von linearer Abhängigkeit wie der Korrelationskoeffizient nach Bravais-Pearson.<sup>17</sup>

Die Rangkorrelationen messen Abhängigkeiten über die Eigenschaft der Komonotonie. Zwei Variablen  $X$  und  $Y$  gelten als komonoton, sofern eine Zufallsvariable  $Q$  und zwei streng monoton steigende Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  existieren, sodass  $X = f_1(Q)$  und  $Y = f_2(Q)$  gilt. Die Variablen hängen damit vollständig von der gemeinsamen Zufallsvariable  $Q$  ab und steigen oder fallen gleichzeitig. Bei zwei komonotonen Risiken können sich die Entwicklungen nicht ausgleichen, sodass keine Diversifikationseffekte vorliegen. Komonotonie stellt die extremste Form positiver Abhängigkeit dar. Sofern sich die Variablen vollständig gegenläufig entwickeln und zwischen ihnen ein umgekehrt monotoner Zusammenhang besteht, liegt Kontramonotonie vor. In diesem Fall geht der Anstieg der einen Variablen mit dem Sinken der anderen Variablen einher und es liegt die extremste Form negativer Abhängigkeit vor.<sup>18</sup>

### 2.3.1 Spearmans Rangkorrelationskoeffizient

Spearmans Rangkorrelationskoeffizient ( $\rho_s$ ) basiert auf dem Korrelationskoeffizienten von Bravais-Pearson. Statt der Verwendung der numerischen Werte  $x_i$  und  $y_i$ , werden die Rangzahlen ( $rg$ ) der Beobachtungen und die Mittelwerte der Ränge ( $\overline{rg}$ ) genutzt. Der Stichprobenschätzer ( $\widehat{\rho}_s$ ) berechnet sich über Formel 3:<sup>19</sup>

$$\widehat{\rho}_s(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^n rg(x_i)rg(y_i) - n \cdot \overline{rg}_x \overline{rg}_y}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n rg(x_i)^2 - n \cdot \overline{rg}_x^2) \cdot (\sum_{i=1}^n rg(y_i)^2 - n \cdot \overline{rg}_y^2)}} \quad (3)$$

$$\text{mit } \overline{rg}_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n rg(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i = \frac{n+1}{2} \quad (3a)$$

$$\text{und } \overline{rg}_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n rg(y_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i = \frac{n+1}{2}. \quad (3b)$$

Formel 3: Stichprobenschätzer des Spearmans Rangkorrelationskoeffizienten

<sup>17</sup> Vgl. Embrechts, P. et al., Dependence, 2002, S. 195; Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 276; Fahrmeir, L. et al., Statistik, 2011, S. 142 f.; Reinboth, C., Zusammenhangsmaße, 2016, o. S.

<sup>18</sup> Vgl. Embrechts, P. et al., Dependence, 2002, S. 192 ff.; Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 102; Fahrmeir, L. et al., Statistik, 2011, S. 143 f.

<sup>19</sup> Vgl. Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 276; Fahrmeir, L. et al., Statistik, 2011, S. 142 f. Zum Vorgehen bei nicht eindeutigen Rängen, siehe: Fahrmeir, L. et al., Statistik, 2011, S. 142.

Der Rangkorrelationskoeffizient liegt im Wertebereich  $-1 \leq \rho_S \leq 1$  und ist symmetrisch. Es gilt:  $\rho_S(X, Y) = \rho_S(Y, X)$ . Bei  $\rho_S = 1$  sind die Variablen komonoton, bei  $\rho_S = -1$  kontramonoton. Unabhängige Zufallsvariablen weisen eine Rangkorrelation von null auf. Analog zum linearen Rangkorrelationskoeffizienten gilt, dass die Umkehrung dieser Aussage im Allgemeinen nicht möglich ist.<sup>20</sup>

### 2.3.2 Kendalls Tau

Kendalls Tau kann als Maß für Konkordanz interpretiert werden. Seien  $(x_i, y_i)$  und  $(x_j, y_j)$  zwei Beobachtungen der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ . Wenn eine gleichzeitige Verringerung oder Vergrößerung der beobachteten Werte vorliegt, ist das Paar  $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$  konkordant. Werden hingegen die Werte nicht gleichzeitig größer oder kleiner, ist das Paar  $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$  diskordant. Alternativ ausgedrückt liegt Konkordanz vor, wenn gilt  $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$ . Diskordanz ist dementsprechend auch definiert als  $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$ .<sup>21</sup>

Gegeben seien zwei Vektoren mit Zufallsvariablen  $(X_1, Y_1)$  und  $(X_2, Y_2)$ . Kendalls Tau ( $\tau$ ) ist dann definiert als Wahrscheinlichkeit der Konkordanz minus der Wahrscheinlichkeit der Diskordanz (siehe Formel 4):<sup>22</sup>

$$\tau_{X,Y} = P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0). \quad (4)$$

Formel 4: Kendalls Tau

Der Stichprobenschätzer ( $\hat{\tau}$ ) beruht auf dem Vergleich jeder Beobachtung mit allen anderen. Dies ergibt  $\binom{n}{2}$  unterschiedliche Paare  $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$ . Jedes dieser Paare ist entweder konkordant oder diskordant. Über die Anzahl der konkordanten ( $c$ ) und diskordanten Paare ( $d$ ) wird der Schätzer für Daten ohne Bindungen über Formel 5 berechnet:<sup>23</sup>

$$\hat{\tau}_{X,Y} = \frac{c-d}{c+d} = (c-d) / \binom{n}{2} = \frac{c-d}{n(n-1)/2}. \quad (5)$$

Formel 5: Stichprobenschätzer Kendalls Tau

<sup>20</sup> Vgl. McNeil, A. et al., QRM, 2005, S. 207; Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 277 f.; Fahrmeir, L. et al., Statistik, 2011, S. 142 ff.

<sup>21</sup> Vgl. McNeil, A. et al., QRM, 2005, S. 206; Nelsen, R., Copula, 2006, S. 157 f.

<sup>22</sup> Vgl. McNeil, A. et al., QRM, 2005, S. 206; Nelsen, R., Copula, 2006, S. 157 f.

<sup>23</sup> Vgl. Nelsen, R., Copula, 2006, S. 158; Hlawatsch, S., Reichling, P., Copula, 2010, S. 4.

Für Tau gelten die gleichen Eigenschaften für den Wertebereich, die Symmetrie und die Skalierung wie für den Rangkorrelationskoeffizienten nach Spearman.<sup>24</sup>

## 2.4 Copulas

Mehrdimensionale Verteilungsfunktionen können mit Hilfe von Copulas über einzelne Randverteilungen und die Abhängigkeitsstruktur zwischen ihnen modelliert werden. Copulas können daher als alternatives Maß der Abhängigkeit zwischen zwei oder mehreren Zufallsvariablen aufgefasst werden. Anstatt die Abhängigkeit auf eine Kennzahl zu verdichten, beschreiben Copula-Funktionen die Abhängigkeitsstruktur der gemeinsamen Verteilung.<sup>25</sup>

### 2.4.1 Hintergrund der Copula-Theorie<sup>26</sup>

Die Abhängigkeit zwischen mehreren Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  wird vollständig durch die gemeinsame multivariate Verteilungsfunktion  $H$  beschrieben (siehe Formel 6). Mit der Funktion  $H$  kann bestimmt werden, mit welcher Wahrscheinlichkeit bestimmte Zufallsvariablen gleichzeitig eintreten. Ausgehend von den univariaten Verteilungsfunktionen  $F_i(x)$  wird hierzu die Abhängigkeitsstruktur zwischen den Zufallsvariablen benötigt. Diese Information zur „Kopplung“ der Zufallsvariablen befindet sich in der Funktion  $C$ , der Copula-Funktion (siehe Formel 6a). Copulas sind multivariate Verteilungsfunktionen mit  $n$  zwischen 0 und 1 gleichverteilten Rändern.<sup>27</sup>

$$H(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \quad (6)$$

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)). \quad (6a)$$

Formel 6: Multivariate Verteilungsfunktion H

<sup>24</sup> Vgl. McNeil, A. et al., QRM, 2005, S. 207; Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 279. Auf eine wiederholende Darstellung wird an dieser Stelle verzichtet, siehe Kapitel 2.3.1.

<sup>25</sup> Vgl. Hlawatsch, S., Reichling, P., Copula, 2010, S. 1 f.; Yener, T., Risk Management, 2012, S. 18.

<sup>26</sup> Im Rahmen dieser Arbeit wird nur eine Einführung in die Copula-Theorie gegeben. Für tiefere Details siehe: McNeil, A. et al., QRM, 2005 oder Nelsen, R., Copula, 2006.

<sup>27</sup> Vgl. Embrechts, P. et al., Dependence, 2002, S. 180; Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 264 f.; Hlawatsch, S., Reichling, P., Copula, 2010, S. 5; Cherubini, U. et al., Copula, 2012, S. 11 f.; Yener, T., Risk Management, 2012, S. 19. Für die weiteren mathematischen Eigenschaften wird auf Embrechts, P. et al., Dependence, 2002, S. 180 verwiesen.

Eine für das Risikomanagement zentrale Eigenschaft von Copulas ist im Satz von Sklar festgehalten. Jede multivariate Verteilungsfunktion  $H$  kann in die Abhängigkeitsstruktur  $C$  und ihre  $n$  Randverteilungen  $F_i(x)$  zerlegt werden. Andersherum kann aus den einzelnen Randverteilungen und der Copula-Funktion die multivariate Verteilungsfunktion  $H$  gebildet werden.<sup>28</sup>

Copulas sind invariant unter monotonen Transformationen der Randverteilungen. Der transformierte Zufallsvektor besitzt daher die gleiche Copula wie der Ausgangsvektor. Dies liegt daran, dass Copulas nur von den Rangzahlen der Zufallsvariablen abhängen. Hiermit ergibt sich ein Zusammenhang zu den bereits in Kapitel 2.3 dargestellten Rangkorrelationen (Spearmans Rangkorrelationskoeffizient und Kendalls Tau). Präziser ausgedrückt basieren diese Kennzahlen auf der Copula der untersuchten Zufallsvariablen.<sup>29</sup> Dieser Zusammenhang kann bei der Modellierung einer Copula aus einer beobachteten Zeitreihe genutzt werden (siehe Kapitel 4.2.2).<sup>30</sup>

### 2.4.2 Copula Schranken

Jede Copula liegt innerhalb einer oberen und unteren Schranke, die nach ihren Entdeckern auch Fréchet-Hoeffding-Schranken oder Grenzen heißen (siehe Formel 7b für den Fall einer bivariaten Copula mit zwei Zufallsvariablen). Die obere Schranke ist die Copula der perfekten positiven Abhängigkeit (Komonotonie-Copula). Bei zwei gleichverteilten Zufallsvariablen  $U_1$  und  $U_2$  soll die eine vollständig von der anderen abhängen. Hierzu soll gelten:  $U_1 = U_2$ . Die bivariate Copula ist in diesem Fall über Formel 7 definiert. Die untere Schranke bildet die Kontramonotonie-Copula. Für die vollständig gegenläufige Entwicklung soll  $U_2 = 1 - U_1$  sein. Dann ist die Copula über Formel 7a definiert. Diese Schranken können grundsätzlich auch auf mehrdimensionale Copulas übertragen werden (siehe Formel 7c). Hierbei ist jedoch zu beachten, dass Kontramonotonie nur im zweidimensionalen Fall (zwischen zwei Zufallsvariablen) erreicht werden kann. Bei drei Zufallsvariablen  $U_1$  bis  $U_3$  kann sowohl zwischen  $U_1$  und  $U_2$  als auch zwischen  $U_1$  und  $U_3$  ein kontramonomoter Zusammenhang vorgegeben werden. Dies legt jedoch die Abhängigkeit von  $U_2$  und  $U_3$  fest. Wenn  $U_1$  steigt, fallen  $U_2$

---

<sup>28</sup> Vgl. Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 266 f.; Cherubini, U. et al., Copula, 2012, S. 12.

<sup>29</sup> Für die Darstellung des mathematischen Zusammenhangs siehe bspw.: McNeil, A. et al., QRM, 2005, S. 207.

<sup>30</sup> Vgl. Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 267; Yener, T., Risk Management, 2012, S. 19 f.



und  $U_3$ . Somit ist die Abhängigkeit zwischen  $U_2$  und  $U_3$  nicht kontramonoton. Zudem erfüllt die untere Schranke im mehrdimensionalen Fall nicht mehr die Anforderungen einer Copula-Funktion.<sup>31</sup>

$$C_u(u_1, u_2) = P[U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2] = \min(u_1, u_2) \quad (7)$$

$$C_l(u_1, u_2) = P[U_1 \leq u_1, 1 - U_1 \leq u_2] = \max(u_1 + u_2 - 1, 0) \quad (7a)$$

$$\max(u_1 + u_2 - 1, 0) \leq C(u_1, u_2) \leq \min(u_1, u_2) \quad (7b)$$

$$\max\left(\sum_{i=1}^n u_i + 1 - n, 0\right) \leq C(u_1, \dots, u_n) \leq \min(u_1, \dots, u_n). \quad (7c)$$

Formel 7: Fréchet-Hoeffding-Schranken

Graphisch im Einheitskubus dargestellt (siehe Abbildung 2), liegt die Oberfläche jeder bivariaten (kumulierten) Copula-Verteilungsfunktion in der eingezeichneten schiefen Pyramide.<sup>32</sup>

---

<sup>31</sup> Vgl. McNeil, A., et al., QRM, 2005, S. 188 ff., 200f.; Nelsen, R., Copula, 2006, S. 11 ff.; Schmidt, T., Copula, 2006, S. 6f.; Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 268.

<sup>32</sup> Vgl. McNeil, A., et al., QRM, 2005, S. 190; Schmidt, T., Copula, 2006, S. 6.

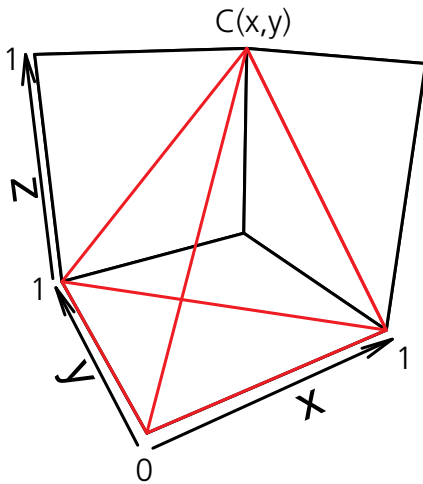


Abbildung 2: Schranken der bivariaten Copula im Einheitskubus  
Quelle: In Anlehnung an Schmidt, T., Copulas, 2006, S. 6

### 2.4.3 Randabhängigkeiten

Zur Beschreibung der Abhängigkeitsstrukturen von Copula-Funktionen wird insbesondere auf die Eigenschaft der Randabhängigkeiten zurückgegriffen. Während die bisher vorgestellten Konzepte zur Messung von Abhängigkeiten die gesamte Abhängigkeitsstruktur erfassen, fokussieren sich die Randabhängigkeitskoeffizienten auf den Eintritt von Extremereignissen. Der obere Randabhängigkeitskoeffizient ( $\lambda_u$ ) beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass eine stetige Zufallsvariable ein bestimmtes Quantil ( $q$ ) überschreitet unter der Bedingung, dass eine andere stetige Zufallsvariable ebenfalls dieses Quantil überschritten hat. Das Quantil nähert sich dabei zur Bestimmung des Koeffizienten immer weiter dem oberen Grenzwert der Verteilungsfunktion (1) an (siehe Formel 8). Andersherum beschreibt der untere Randabhängigkeitskoeffizient ( $\lambda_l$ ) die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsvariable ein bestimmtes Quantil nicht überschreitet, wenn die andere Zufallsvariable dieses Quantil ebenfalls nicht überschritten hat. Hierbei erfolgt auch eine Grenzwertbetrachtung und das Quantil nähert sich immer weiter dem unteren Grenzwert (0) an (siehe Formel 8b).<sup>33</sup>

<sup>33</sup> Vgl. McNeil, A. et al., QRM, 2005, S. 208 f.; Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 280.

$$\lambda_u(X_1, X_2) = \lim_{q \rightarrow 1} P(X_2 > F_2^{-1}(q) | X_1 > F_1^{-1}(q)) \quad (8)$$

$$\lambda_u(X_1, X_2) = \frac{1 - 2q + C(q, q)}{1 - q} \quad (8a)$$

$$\lambda_l(X_1, X_2) = \lim_{q \rightarrow 0} P(X_2 \leq F_2^{-1}(q) | X_1 \leq F_1^{-1}(q)) \quad (8b)$$

$$\lambda_l(X_1, X_2) = \frac{C(q, q)}{q}. \quad (8c)$$

Formel 8: Randabhängigkeitskoeffizienten

Sofern die Grenzwerte existieren und im Intervall ]0, 1] liegen, besteht zwischen den Zufallsvariablen eine obere ( $\lambda_u$ ) oder untere ( $\lambda_l$ ) Randabhängigkeit. Hierbei treten extreme Ereignisse in den oberen bzw. unteren Quantilen der Verteilungsfunktionen (nahe 1 oder 0) vermehrt gemeinsam auf. Bei  $\lambda_u = 0$  oder  $\lambda_l = 0$  treten Extremereignisse unabhängig voneinander ein.<sup>34</sup>

#### 2.4.4 Abhängigkeitsstrukturen ausgewählter Copula-Familien

Zu den typischen Vertretern der Copula-Funktionen zählen elliptische und archimedische Copulas. Die elliptischen Copulas leiten sich von bekannten elliptischen multivariaten Verteilungsfunktionen wie der Normalverteilung (Gauß-Copula) oder der t-Verteilung (t-Copula) ab.<sup>35</sup> Hierbei kann die Copula über die vorgegebene gemeinsame Verteilungsfunktion  $H$  und die inversen Verteilungsfunktionen der Randverteilungen  $F_1^{-1}, \dots, F_d^{-1}$  ausgehend von einer Umformung der Formel 6a bestimmt werden (siehe Formel 9):<sup>36</sup>

$$C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)) \quad (9)$$

$$\text{mit } F_i^{-1}(u_i) = x_i. \quad (9a)$$

Formel 9: Explizite Formel für Generierung von Copulas

<sup>34</sup> Vgl. McNeil, A. et al., QRM, 2005, S. 208f.; Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 280f..

<sup>35</sup> Für die Definition einer elliptischen Verteilung siehe: Embrechts, P. et al., Dependence, 2002, S. 186 oder Pérignon, C., Smith, D., Diversification, 2010, S. 65.

<sup>36</sup> Vgl. McNeil, A. et al., QRM, 2005, S. 187; Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 266; Skoglund, J. et al., Hierarchical Copulas, 2013, S. 193.

Die Gauß-Copula (oder auch Normal-Copula  $C^N$ ) ist die Copula der multivariaten Normalverteilungsfunktion  $\Phi_R$  mit Korrelationsmatrix  $R$  und den  $n$  univariaten normalverteilten inversen Randverteilungen  $\Phi^{-1}$ . Eingesetzt in Formel 9, hat die  $n$ -dimensionale Gauß-Copula folgende Form (siehe Formel 10):<sup>37</sup>

$$C_R^N(u_1, \dots, u_n) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)). \quad (10)$$

Formel 10: Gauß-Copula

Wenn die Korrelationsmatrix einer beliebig  $n$ -dimensionalen Gauß-Copula nur aus Einsen besteht, liegt Komonotonie zwischen den Zufallsvariablen vor. Bei einer Einheitsmatrix liegt Unabhängigkeit vor. Bei einer bivariaten Gauß-Copula mit einer Korrelation von  $-1$  zwischen den beiden Variablen liegt Kontramonotonie vor. Im zweidimensionalen Fall kann die Korrelation als Stärke der Abhängigkeit interpretiert werden, die zwischen perfekter positiver ( $+1$ ) und negativer Abhängigkeit ( $-1$ ) liegt.<sup>38</sup>

Analog zur Gauß-Copula ist die  $t$ -Copula ( $C^t$ ) in Formel 11 die Verbindung von  $n$  univariaten  $t$ -verteilten inversen Randverteilungen ( $t_v^{-1}$ ) mit  $v$  Freiheitsgraden und einer multivariaten  $t$ -Verteilungsfunktion ( $T_{v,R}$ ) mit  $v$  Freiheitsgraden und Korrelationsmatrix  $R$ .<sup>39</sup>

$$C_{v,R}^t(u_1, \dots, u_n) = T_{v,R}(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_n)). \quad (11)$$

Formel 11:  $t$ -Copula

Die  $t$ -Copula konvergiert für  $v \rightarrow \infty$  gegen die Gauß-Copula. Beide elliptischen Copula-Funktionen besitzt ein symmetrisches Abhängigkeitsverhalten in den unteren  $(0,0)$  und oberen  $(1,1)$  Randbereichen der Verteilung. Für eine geringe Anzahl an Freiheitsgraden weist die  $t$ -Copula mehr Beobachtungen bzw. eine höhere Dichte an den Rändern auf und verfügt damit über eine obere und untere Randabhängigkeit ( $\lambda_u = \lambda_l = 2t_{v+1}[-\sqrt{(v+1)(1-\rho)/(1+\rho)}]$ ).<sup>40</sup> Die Gauß-Copula ist hingegen randunabhängig ( $\lambda_u = \lambda_l = 0$ ).<sup>41</sup> - siehe Streudiagramme

<sup>37</sup> Vgl. Weiß, G., Copula-GARCH-Modelle, 2011, S. 554. Für die ausgeschriebene Formel siehe ebd.

<sup>38</sup> Vgl. McNeil, A. et al., QRM, 2005, S. 191; Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 269 f.

<sup>39</sup> Vgl. McNeil, A. et al., QRM, 2005, S. 191; Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 270; Weiß, G., Copula-GARCH-Modelle, 2011, S. 554.

<sup>40</sup> Vgl. Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 281.

<sup>41</sup> Vgl. Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 281.

und Dichten<sup>42</sup> in Abbildung 3). Das Randabhängigkeitsverhalten führt unter anderem dazu, dass extreme Ereignisse im unteren und oberen Quantil der Verteilungsfunktionen bei Verwendung einer t-Copula im Vergleich zur Gauß-Copula vermehrt gemeinsam auftreten. Zusätzlich treten bei der t-Copula Ereignisse in den Bereichen (0,1) und (1,0) häufiger auf.<sup>43</sup>

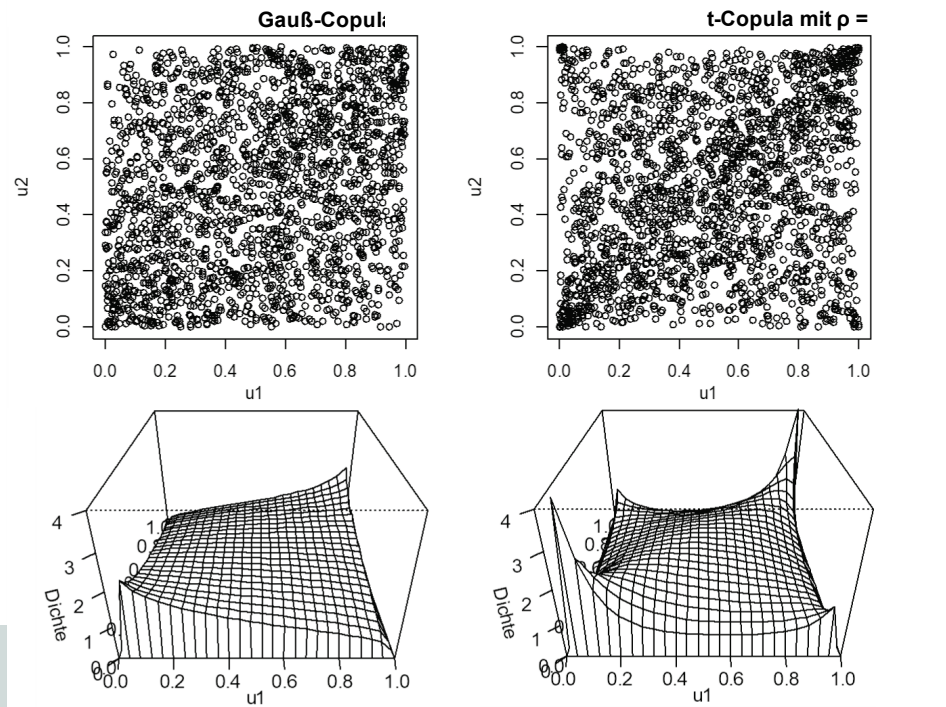


Abbildung 3: Streudiagramme und Dichten der bivariaten Gauß- und t-Copula

Die archimedische Copula-Familie ( $C^A$ ) unterscheidet sich von der elliptischen Copula-Familie insbesondere durch die Möglichkeit, asymmetrische Randabhän-

<sup>42</sup> Die Diagramme basieren auf einer Simulation einer bivariaten Gauß- und t-Copula mit 2.000 Paaren und einer Korrelation von 0,3 und 2 Freiheitsgraden.

<sup>43</sup> Vgl. Beck, A. et al., Copulas, 2006, S. 729; Hlawatsch, S., Reichling, P., Copula, 2010, S. 6 f.; Weiß, G., Copula-GARCH-Modelle, 2011, S. 554 f.

gigkeiten zu modellieren. Sie werden über eine stetige, konvexe Generatorfunktion ( $\gamma$ )<sup>44</sup> und deren Inverse ( $\gamma^{-1}$ ) gebildet (siehe Formel 12). Diese enthält den Generatorparameter  $\theta$ . Zwei populäre Vertreter dieser Copula-Klasse sind die Gumbel-Copula ( $C^G$  – Formel 12a) und die Clayton-Copula ( $C^{Cl}$  – Formel 12b):<sup>45</sup>

$$C_{\theta}^A(u_1, \dots, u_n) = \gamma^{-1}(\gamma(u_1) + \dots + \gamma(u_n)) \quad (12)$$

$$C_{\theta}^G(u_1, \dots, u_n) = \exp\left(-(\sum_{i=1}^n -(\ln u_i)^{\theta})^{\frac{1}{\theta}}\right), \text{ mit } \theta \in [1, \infty[ \quad (12a)$$

$$C_{\theta}^{Cl}(u_1, \dots, u_n) = (u_1^{-\theta} + \dots + u_n^{-\theta} - n + 1)^{-1/\theta}, \text{ mit } \theta \in ]0, \infty[. \quad (12b)$$

Formel 12: Archimedische Copula-Funktionen

Die Gumbel-Copula weist eine obere Randabhängigkeit ( $\lambda_u = 2 - 2^{1/\theta}$  und  $\lambda_l = 0$ )<sup>46</sup> auf (siehe Streudiagramm und Dichte<sup>47</sup> links in Abbildung 4). Für  $\theta = 1$  sind die Zufallsvariablen unabhängig voneinander ( $\lambda_u = 0$ ). Für sehr große  $\theta$  ( $\theta \rightarrow \infty$ ) konvergiert die Gumbel-Copula gegen die Komonotonie-Copula ( $\lambda_u = 1$ ). Vereinfachend lässt sich ausdrücken, dass die Gumbel-Copula zwischen Unabhängigkeit und perfekter positiver Abhängigkeit interpoliert, wobei  $\theta$  die Stärke der Abhängigkeit angibt.

Die Clayton-Copula besitzt eine untere Randabhängigkeit ( $\lambda_u = 0$  und  $\lambda_l = 2^{-1/\theta}$ )<sup>48</sup> (siehe Diagramme rechts in Abbildung 4). Für  $\theta \rightarrow 0$  konvergiert die Clayton-Copula gegen eine Unabhängigkeits-Copula ( $\lambda_l = 0$ ) und bei  $\theta \rightarrow \infty$  nähert sie sich der Komonotonie-Copula ( $\lambda_l = 1$ ) an. Für den Spezialfall  $n = 2$  und  $\theta = -1$  erhält man die Kontramonotonie-Copula. Die Clayton-Copula interpoliert damit zwischen Kontramonotonie, Unabhängigkeit und Komonotonie.<sup>49</sup>

<sup>44</sup> Für die notwendigen mathematischen Eigenschaften einer Generatorfunktion wird auf McNeil, A. et al., QRM, 2005, S. 220, 222 verwiesen.

<sup>45</sup> Vgl. McNeil, A. et al., QRM, 2005, S. 222; Hlawatsch, S., Reichling, P., Copula, 2010, S. 7; Weiß, G., Copula-GARCH-Modelle, 2011, S. 555. Für weitere archimedische Copulas wird auf Nelsen, R., Copula, 2006, S. 109 ff. verwiesen.

<sup>46</sup> Vgl. Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 282.

<sup>47</sup> Die Diagramme basieren auf einer Simulation einer bivariaten Gumbel- und Clayton-Copula mit 2.000 Paaren. Der Generatorparameter wurde so gewählt, dass er ungefähr einer Korrelation von 0,3 entspricht. Vgl. Yener, T., Risk Management, 2012, S. 24.

<sup>48</sup> Vgl. Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 282.

<sup>49</sup> Vgl. McNeil, A. et al., QRM, 2005, S. 192; Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 270 f.; Weiß, G., Copula-GARCH-Modelle, 2011, S. 555; Skoglund, J. et al., Hierarchical Copulas, 2013, S. 194.

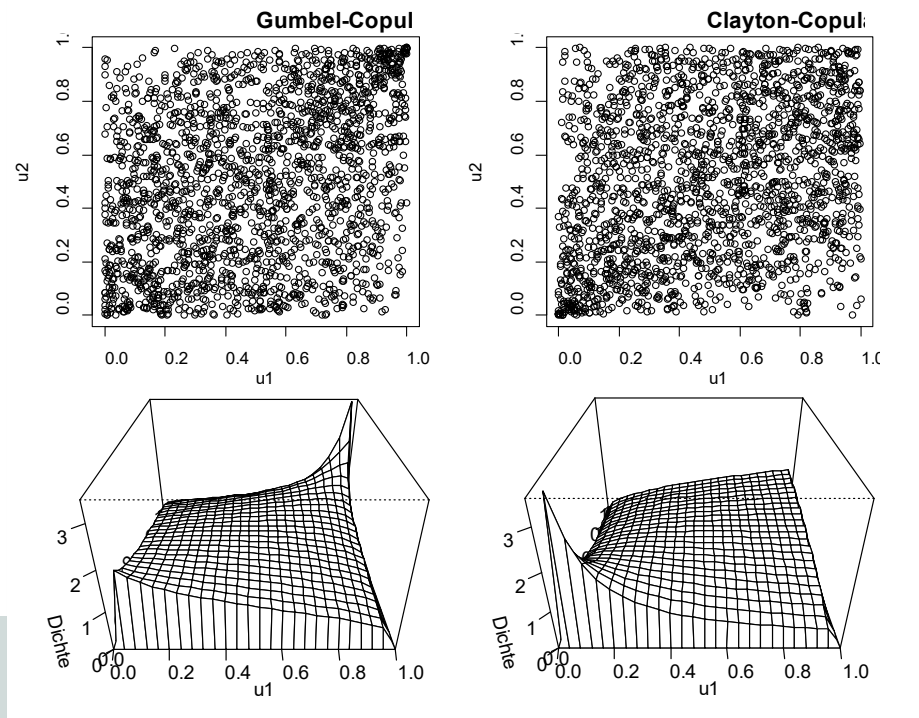


Abbildung 4: Streudiagramme und Dichten der bivariaten Gumbel- und Clayton-Copula

Eine Übertragung der Copula-Funktionen in den multivariaten Fall mit mehr als zwei Dimensionen ist bei allen Copula-Klassen regelmäßig mit besonderen Herausforderungen verbunden. So steigt der Rechenaufwand exponentiell mit der Dimension an. Zudem steigt die Anzahl der zu schätzenden Parameter oder die Copula wird zu unflexibel, um die Wechselwirkungen zwischen allen Variablen zu beschreiben. Des Weiteren fällt bei mehr als drei Dimensionen die Möglichkeit der Visualisierung zwecks Kontrolle weg.<sup>50</sup>

## 2.5 Stabilität der Abhängigkeiten im Zeitverlauf

In der wissenschaftlichen Literatur gibt es unterschiedliche Ansichten darüber, wie Abhängigkeiten am besten gemessen werden können. Es sind sowohl unbedingte als auch bedingte Abhängigkeiten<sup>51</sup> vorstellbar und Korrelationen oder

<sup>50</sup> Vgl. Mai, J., Scherer, M., Abhängigkeiten, 2012, S. 8 f.

<sup>51</sup> Bspw. Korrelationen bedingt unter der Höhe und/oder Volatilität der Renditen.

Copulas können sowohl mit zeitkonstanten als auch zeitabhängigen Parametern modelliert werden.<sup>52</sup>

Besonders für die Wahl einer zeitkonstanten oder zeitabhängigen Modellierung ist die Frage nach der Konstanz der Abhängigkeiten von Bedeutung. In der wissenschaftlichen Literatur mehren sich die Hinweise, dass die Abhängigkeitsstruktur bei realen finanzwirtschaftlichen Zeitreihen nicht durchgehend konstant ist. Für Korrelationen zwischen Aktienmärkten liegen mehrere empirische Studien vor,<sup>53</sup> die einen Anstieg der Korrelation während Krisenzeiten wie z. B. nach der Dotcom Blase im Jahr 2001 oder nach der Finanzmarktkrise 2008 beschreiben.<sup>54</sup> Hierbei ist anzumerken, dass die lineare Korrelation nicht alleine von der Abhängigkeitsstruktur, sondern auch von den Randverteilungen der Variablen beeinflusst wird. Änderungen der linearen Korrelation können daher auch durch Änderungen in den Randverteilungen, die die Standardabweichung beeinflussen, verursacht worden sein. Somit kann eine Veränderung in der Abhängigkeitsstruktur nicht ohne weiteres über eine Änderung der Korrelation nachgewiesen werden.<sup>55</sup> Nichtsdestotrotz sorgt eine Erhöhung der Korrelation gerade in turbulenten Zeiten für eine Abnahme des Diversifikationseffektes. Stressszenarien, die die Korrelationen aus normalen Zeiten bei der Risikoaggregation berücksichtigen, unterschätzen hierdurch das Gesamtrisiko.<sup>56</sup> Auch bei der Abhängigkeitsmodellierung über Copulas wurden in empirischen Arbeiten Strukturbrüche nach großen ökonomischen Ereignissen wie der Einführung des Euros im Jahr 1999 nachgewiesen. Insgesamt liegen hierzu aber weniger Studien vor.<sup>57</sup>

In einer aktuellen empirischen Arbeit haben *Adams, Füss und Glück* Strukturbrüche in täglichen Korrelationsdaten (zwischen S&P500 und NASDAQ; S&P500 und Rohöl; S&P500 und italienischen Staatsanleihen) im Zeitraum von 2000 bis 2014 entdeckt. Sie gehen jedoch davon aus, dass die Korrelation zwischen den

---

<sup>52</sup> Vgl. Campbell, R. et al., *Correlation*, 2007, S. 287 f.; Weiß, G., *Copula-GARCH-Modelle*, 2011, S. 550 f., 556.

<sup>53</sup> Streng genommen handelt es sich hierbei um die Abhängigkeit innerhalb einer Risikoart (Marktpreisrisiko), die nicht vordergründig in dieser Studie behandelt wird.

<sup>54</sup> Siehe exemplarisch: Login, F., Solnik, B., *Correlation*, 1995; Forbes, K., Rigobon, R., *Interdependence*, 2002; Zimmermann, H. et al., *Asset Allocation*, 2003, S. 51–120; Campbell, R. et al., *Correlation*, 2007; van Emmerich, C., *Correlation*, 2009; Bissantz, N. et al., *Correlation*, 2011; und die weiteren Referenzen in diesen Artikeln.

<sup>55</sup> Vgl. Yener, T., *Risk Management*, 2012, S. 11.

<sup>56</sup> Vgl. Campbell, R. et al., *Correlation*, 2007, S. 287; Bissantz, N. et al., *Correlation*, 2011, S. 127, 130.

<sup>57</sup> Siehe bspw.: Zwischen Währungen: Patton, A., *Dependence*, 2006; Aktienmärkte: Rockinger, M., Jondeau, E., *Dependence*, 2001; Guegan, D., Zhang, J., *Dynamic Copula*, 2006; Rodriguez, J., *Contagion*, 2007.



Strukturbrüchen konstant ist und sich nur nach großen ökonomischen Ereignissen wie z. B. nach der Insolvenz von Lehman Brothers 2008 oder nach der europäischen Staatsschuldenkrise 2010 verändert. Sie gelangen zu dem Schluss, dass eine zeitkonstante Messung der Korrelation über Zeitfenster eine angemessenere Vorgehensweise als die Nutzung von populären GARCH-Modellen, die eine zeitabhängige Messung erlauben, sein kann.<sup>58</sup> Eine umfangreiche empirische Untersuchung zur Konstanz der Korrelation zwischen mehreren Assetklassen (unter anderem Rentenperformanceindex RexP, EuroStoxx 50, DAX, Rohöl Brent, Corporate-Index<sup>59</sup>), die unterschiedlichen Risikofaktoren ausgesetzt sind, ist in Reuse zu finden. Er vergleicht historische und rollierende Korrelationen vor und nach Krisenzeiten und kommt zu dem Ergebnis, dass langfristige Korrelationen stabil bleiben und zur Berücksichtigung von Diversifikationseffekten genutzt werden können.<sup>60</sup>

Da die nachfolgend beleuchteten Konzepte zur Aggregation von Risiken auf den Abhängigkeiten von Risikofaktoren beruhen, entsteht aus der ungeklärten wissenschaftlichen Frage, wie Abhängigkeiten am besten beschrieben werden, ein immanentes Modellrisiko.

---

<sup>58</sup> Vgl. Adams, Z. et al., Correlations, 2017, S. 9 ff.

<sup>59</sup> Bank of America Merrill Lynch Corporate Index.

<sup>60</sup> Vgl. Reuse, S., Korrelationen, 2011, S. 143–156; Reuse, S., Diversifikationseffekte, 2016, S. 311–322, betrachteter Zeitraum 2000-2016.

### 3 Aufsichtliche Anforderungen an die ökonomische Kapitalausstattung eines Kreditinstitutes

Neben der bankaufsichtlich vorgegebenen Mindestkapitalausstattung zur Unterlegung von Kredit-, Marktpreis- und operationellen Risiken, die sich nach festen Regeln der europäischen Kapitaladäquanzverordnung (kurz: CRR) bestimmen,<sup>61</sup> müssen Kreditinstitute zusätzlich genügend ökonomisches Kapital zur Abdeckung aller wesentlichen Risiken vorhalten.<sup>62</sup> Diese Anforderung ist auf nationaler Ebene in § 25a Abs. 1 S. 3 Kreditwesengesetz (kurz: KWG) eingegangen. Hiernach müssen Kreditinstitute ein angemessenes und wirksames Risikomanagement besitzen, mit dem die Risikotragfähigkeit laufend sicherzustellen ist.<sup>63</sup>

Die konkrete Ausgestaltung der Berechnungsmethodik bleibt grundsätzlich der jeweiligen Bank überlassen. Die Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (kurz: BaFin) hat jedoch die Mindestanforderungen an das Risikomanagement (kurz: MaRisk)<sup>64</sup> als norminterpretierende Verwaltungsvorschriften veröffentlicht. In diesen bringt sie zum Ausdruck, welche Anforderungen die Bankenaufsicht aus dem § 25a KWG ableitet.<sup>65</sup>

#### 3.1 Bankaufsichtliche Risikotragfähigkeitskonzepte

Als Risikotragfähigkeit wird laut MaRisk die laufende Abdeckung der wesentlichen Risiken einer Bank durch das Risikodeckungspotential bezeichnet (AT 4.1 Tz. 1 MaRisk). Mit dem Risikotragfähigkeitskonzept soll sichergestellt werden, dass die aus den wesentlichen Risiken resultierenden Verluste durch Kapital aufgefangen werden können. In der konkreten Ausgestaltung des Konzeptes sind die Kreditinstitute grundsätzlich frei. Die gewählten internen Verfahren müssen jedoch die Sicherstellung der Risikotragfähigkeit gewährleisten.<sup>66</sup> Dabei ist eine

---

<sup>61</sup> Siehe Art. 92 Abs. 3 CRR.

<sup>62</sup> Diese Vorgabe stammt aus der Säule 2 von Basel II (vgl. BCBS, Basel II, 2004, S. 147 ff.), die über die europäische Richtlinie CRD IV (insb. Art. 73 CRD IV) in nationales Recht umgesetzt wurden. Für weitere Informationen zur rechtlichen Umsetzung siehe bspw.: Seuthe, A., Risikotragfähigkeit, 2014, Tz. 291 ff.

<sup>63</sup> Vgl. Bartetzky, P., Gesamtbanksteuerung, 2012, S. 4 f.; Hannemann, R. et al., MaRisk-Kommentar, 2013, S. 76, 174 f.

<sup>64</sup> BaFin, MaRisk, 2017.

<sup>65</sup> Vgl. Hannemann, R. et al., MaRisk-Kommentar, 2013, S. 24; Seuthe, A., Risikotragfähigkeit, 2014, Tz. 324, 332.

<sup>66</sup> Vgl. BaFin, Leitfaden, 2018, Tz. 6.

vorsichtige Ermittlung des Risikodeckungspotentials und der Risiken vorzunehmen (§ 25a Abs. 1 S. 3 Nr. 2 KWG). Zudem hängt die Umsetzung der Anforderungen nach § 25a Abs. 1 S. 4 KWG von Art, Umfang, Komplexität und Risikogehalt der Geschäftstätigkeit ab. Damit werden höhere Anforderungen an die verwendeten Methoden großer Institute mit komplexen Geschäften gestellt als an kleine Banken, die nur das klassische Kreditgeschäft betreiben.<sup>67</sup>

Zusätzliche Maßstäbe, mit denen die Bankenaufsicht die Risikotragfähigkeitskonzepte beurteilt, wurden in einem Schreiben der BaFin vom 24.05.2018<sup>68</sup> dargelegt. Dieser Leitfaden konkretisiert die aufsichtlichen Anforderung noch einmal zusätzlich und unterstützt Kreditinstitute bei der Ausgestaltung ihres individuellen Risikotragfähigkeitskonzeptes.<sup>69</sup>

Die Konzepte zur Sicherstellung der Risikotragfähigkeit nach alter Prägung<sup>70</sup> können in zwei Perspektiven eingeteilt werden. Es wurde zwischen Fortführungsansätzen (den Going-Concern-Ansätzen) und Liquidationsansätzen (den Gone-Concern-Ansätzen) unterschieden. Erstere zielten auf den Fortbestand der Bank im Falle des Verlusteintritts ab und schützten damit unter anderem die Eigenkapitalgeber. Hierzu musste sichergestellt werden, dass auch nach Eintritt der Verluste genügend Kapital zur Einhaltung der Mindestkapitalanforderungen nach CRR zur Verfügung steht. Die Liquidationsansätze hingegen sollten die Befriedigung der (erstrangigen) Gläubiger im Liquidationsfall sicherstellen.<sup>71</sup> Die Übergänge zwischen beiden Perspektiven waren fließend, sodass auch Mischformen vorkommen konnten.<sup>72</sup> Je nach gewählter Perspektive mussten die weiteren Annahmen zur Ableitung des Risikodeckungspotentials,<sup>73</sup> zum Risikobetrachtungshorizont und zum Konfidenzniveau konsistent hierzu getroffen werden.<sup>74</sup>

---

<sup>67</sup> Vgl. Deutsche Bundesbank, Monatsbericht RTF, 2013, S. 33.

<sup>68</sup> BaFin, Leitfaden, 2011.

<sup>69</sup> Vgl. BaFin, Anschreiben Leitfaden, 2011; Hannemann, R. et al., MaRisk-Kommentar, 2013, S. 177.

<sup>70</sup> Gemeint sind die Konzepte aus dem BaFin, Leitfaden, 2011. Die Bezeichnung wurde im neuen Leitfaden-Entwurf eingeführt. Vgl. BaFin, Leitfaden, 2018, Tz. 8.

<sup>71</sup> Vgl. BaFin, Leitfaden, 2011, Tz. 8 f.; Deutsche Bundesbank, Monatsbericht RTF, 2013, S. 34; Hannemann, R. et al., MaRisk-Kommentar, 2013, S. 181.

<sup>72</sup> Vgl. Bartetzky, P., Gesamtbanksteuerung, 2012, S. 20.

<sup>73</sup> Für weitere Informationen zur Ableitung des Risikodeckungspotentials siehe: BaFin, Leitfaden, 2011, Tz. 19–84; Bartetzky, P., Gesamtbanksteuerung, 2012, S. 24 ff. oder Deutsche Bundesbank, Monatsbericht RTF, 2013, S. 41 f.

<sup>74</sup> Vgl. BaFin, Leitfaden, 2011, Tz. 94, 101; Deutsche Bundesbank, Monatsbericht RTF, 2013, S. 34 f.; Hannemann, R. et al., MaRisk-Kommentar, 2013, S. 183.

Zukünftig müssen sowohl die Perspektive der Fortführung des Instituts als auch die des Gläubigerschutzes berücksichtigt werden. Das Risikotragfähigkeitskonzept muss daher sowohl eine normative Perspektive (Einhaltung aller regulatorischen Anforderungen) als auch eine ökonomische Perspektive (langfristiger Substanzschutz des Instituts) berücksichtigen. Bis auf Weiteres ist jedoch auch die Nutzung der bisherigen Going-Concern-Ansätze zulässig. Die Liquidationsansätze gehen in der ökonomischen Perspektive auf und können nicht mehr eigenständig verwendet werden.<sup>75</sup>

### 3.2 Quantifizierung von wesentlichen Risiken

Im Risikotragfähigkeitskonzept sind gemäß AT 4.1 Tz. 1 MaRisk Risikobeträge für alle wesentlichen Risiken über geeignete Verfahren zu bestimmen. Die Quantifizierung dieser Risiken kann über unterschiedliche Ansätze erfolgen. Aufgrund der großen Anzahl an unterschiedlichen Risikomessmethoden hat die Aufsicht keine übergreifenden methodischen Grundüberlegungen veröffentlicht oder allgemeine Beurteilungsmaßstäbe aufgestellt.

Die Höhe der Risikowerte ist unabhängig vom konkreten Verfahren regelmäßig maßgeblich durch die Wahl der Eingangsparameter beeinflusst. Die Aufsicht fordert daher, dass diese Parameter im Einklang mit der Risikotragfähigkeitsperspektive ausgewählt werden. So musste bei Gone-Concern-Ansätzen zur Quantifizierung des Risikowertes ein Ereignis mit vergleichsweise niedriger Eintrittswahrscheinlichkeit und entsprechend höherer Verlustausprägung zu Grunde gelegt werden, da neben dem Risikodeckungspotential keine weitergehenden Reserven zur Verlustabsorption zur Verfügung stehen. In Going-Concern-Ansätzen kann hingegen bei Eintritt der Risiken noch auf das regulatorische Mindestkapital zurückgegriffen werden.<sup>76</sup> Für die neue ökonomische Perspektive ist vorgesehen, dass sich die verwendeten Verfahren an dem Niveau der internen Modelle zur Bestimmung der Mindestkapitalanforderungen nach CRR orientieren. Dies gilt insbesondere für das verwendete Konfidenzniveau von 99,9 %.<sup>77</sup>

Um Aussagen über Eintrittswahrscheinlichkeiten von Verlusten treffen zu können, wird das Risiko eines Portfolioverlustes durch eine Zufallsvariable  $X$  (Höhe

---

<sup>75</sup> Vgl. BaFin, Anschreiben Leitfaden, 2018; BaFin, Leitfaden, 2018, Tz. 8, 22 ff., 37ff. Für weitere Informationen siehe ebd.

<sup>76</sup> Vgl. BaFin, Leitfaden, 2018, Anhang Tz. 65 f.; Deutsche Bundesbank, Monatsbericht RTF, 2013, S. 34, 44; Hannemann, R. et al., MaRisk-Kommentar, 2013, S. 185.

<sup>77</sup> Vgl. BaFin, Leitfaden, 2018, Tz. 61 und Fußnote 13.

eines ökonomischen Verlustes) modelliert.<sup>78</sup> Die Quantifizierung des Risikos erfolgt dann ausgehend von einer Verlustverteilung (Wahrscheinlichkeitsverteilung – siehe Abbildung 5 als Beispiel für eine Dichtefunktion). Hierzu werden für die einzelnen Wertänderungen des Portfolios (Renditen) Eintrittswahrscheinlichkeiten anhand historischer Zeitreihen geschätzt. Über eine Verteilungsfunktion  $F(x)$  der Zufallsvariablen  $x$  werden den Realisationen ( $x$  nimmt den Wert an, der kleiner oder gleich  $x$  ist) diese Wahrscheinlichkeiten zugeordnet. Da sich eine vollständige Funktion nicht zur Kapitalhinterlegung oder Steuerung eignet, werden einzelne Charakteristika der Verteilung verwendet, die sich in wenigen Kennzahlen, den sogenannten Risikomaßen, verdichten lassen. Durch die Verdichtung werden unterschiedliche Risikoarten vergleichbar, was eine Voraussetzung für die Aggregation einzelner bestimmter Risikowerte darstellt. Der Value-at-Risk zählt neben dem Erwartungswert oder der Volatilität zu den bekanntesten Kennzahlen.<sup>79</sup>

Bereits aus diesem Vorgehen ergeben sich zwei Problemfelder. Erstens muss die Verteilungsfunktion anhand historischer Daten spezifiziert werden, wodurch die Vorhersagekraft eingeschränkt ist. Zweitens ist die Schätzung einer unbekannteren Verteilungsfunktion selbst bei zeitlicher Invarianz dieser Funktion herausfordernd, da diese bei der Modellierung durch idealtypische Verteilungen nachgebildet werden muss.<sup>80</sup>

### 3.2.1 Value-at-Risk

Der Value-at-Risk (kurz: VaR) gehört zu den Standard-Risikomaßen zur Messung finanzieller Risiken. Seinen Ursprung hat der VaR bei der Messung der Marktpreisrisiken. Die Methodik lässt sich jedoch auch auf andere Risikoarten übertragen. Somit ist der VaR ein möglicher Ausgangspunkt zur Aggregation unterschiedlicher Risiken. Der VaR gibt den Verlust an, der mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit  $P$  – hier das Konfidenzniveau  $\alpha$  – innerhalb des Risikobetrachtungshorizontes ausgehend von den Marktbedingungen des Beobachtungszeitraumes nicht überschritten wird. Andersherum soll nur mit der Restwahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$  ein Verlust  $L$  eintreten, der den Value-at-Risk übersteigt

---

<sup>78</sup> Vgl. FMA, ÖNB, Quantitative Modelle, 2004, S. 34; Wiesemann, H., Risikostreuung, 2011, S. 424.

<sup>79</sup> Vgl. Brandtner, M., Risikomessung, 2010, S. 25 ff.; Bartetzky, P., Gesamtbanksteuerung, 2012, S. 95; Wüst, K., Risikomanagement, 2014 S. 74 f.; Handschuh, N., Modellrisiken, 2015, Tz. 823.

<sup>80</sup> Vgl. McNeil, A. et al., QRM, 2005, S. 36.

(siehe Abbildung 5). In der Dichtefunktion in Abbildung 5 entspricht der Flächeninhalt unter der Kurve von 0 bis zur Stelle  $x$  jeweils einer kumulierten Eintrittswahrscheinlichkeit ( $P(X \leq x)$ ).<sup>81</sup>

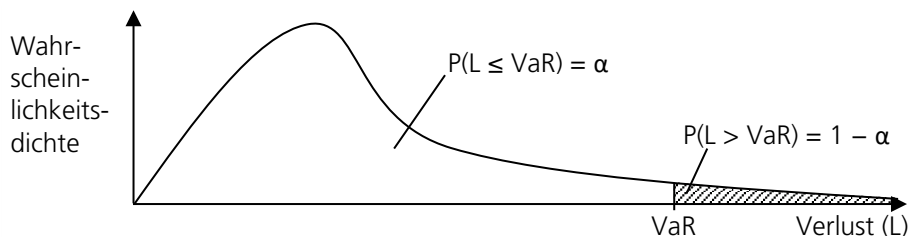


Abbildung 5: Visualisierung des VaR in einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  
 Quelle: In Anlehnung an Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 116.

Diese Stelle (Realisation  $x$ ) kann über die inverse Verteilungsfunktion ( $F^{-1}$ ), auch Quantilfunktion genannt, zur Verlustverteilungsfunktion  $F(x)$  ermittelt werden. Die Quantilfunktion ordnet jeder kumulierten Wahrscheinlichkeit eine Ausprägung  $x$  zu. Mathematisch ausgedrückt wird die größte untere Schranke ( $x$ ) gesucht, bei der die Eintrittswahrscheinlichkeit für einen Verlust ( $L$ ), der diese Schranke übersteigt, kleiner als das  $1-\alpha$ -Quantil ist (siehe Formel 13).<sup>82</sup>

$$\text{VaR}(\alpha) = \inf(x | P(L > x) \leq 1 - \alpha) = \inf(x | F(x) \geq \alpha) = F^{-1}(\alpha). \quad (13)$$

Formel 13: Berechnung des Value-at-Risk

Der VaR kann über unterschiedliche Ansätze berechnet werden. Bei der historischen Simulation, welches ein nicht parametrisches Verfahren darstellt, dienen beobachtete Wertänderungen als Ausgangsbasis. Hierbei wird keine explizite Annahme für die Verlustverteilung benötigt, da der VaR ausgehend von den sortierten Verlusten bestimmt werden kann. Im Modellbildungsansatz (parametrische Verfahren – hierzu zählen Varianz-Kovarianz-Ansätze und die Monte-

<sup>81</sup> Vgl. McNeil, A. et al., QRM, 2005, S. 38; Großmann, S., Stresstests, 2006, S. 74; Bartetzky, P., Gesamtbanksteuerung, 2012, S. 96 f.; Hannemann, R. et al., MaRisk-Kommentar, 2013, S. 188; Handschuher, N., Modellrisiken, 2015, Tz. 824 f.; Mondelle, E., Portfoliomanagement, 2015, S. 22 f.; Hull, J., Risikomanagement, 2016, S. 295 f.

<sup>82</sup> Vgl. Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 132, 414; Großmann, S., Stresstests, 2006, S. 76; McNeil, A. u. a., QRM, 2005, S. 38.

Carlo-Simulation) wird für die Verteilung ein Modell unterstellt und die Modellparameter werden anhand historischer Daten geschätzt.<sup>83</sup>

Sofern die Risikofaktoren nicht aus elliptischen Verteilungen stammen (hierzu gehört z. B. die Normalverteilung), offenbart sich ein für die Risikoaggregation besonders gravierender Nachteil dieses Risikomaßes. Denn der VaR ist dann nicht subadditiv und gehört daher nicht zu den sogenannten kohärenten Risikomaßen.<sup>84</sup> Subadditivität bedeutet, dass das Risikomaß für ein Gesamtportfolio nicht größer als die Summe der Risikomaße der Teilportfolios ist. Durch diese Eigenschaft ist sichergestellt, dass das Risiko bei der Addition von zwei Teilrisiken vollständig erfasst wird. Während die Modellierung der Marktpreisrisiken durch eine elliptische Verteilung noch möglich erscheint, ist sie für Adressenausfall- und operationelle Risiken nicht haltbar.<sup>85</sup> Ein weiterer Nachteil ist, dass Risiken aus den Randbereichen der Verteilung, die außerhalb des gewählten Konfidenzniveaus auftreten, unberücksichtigt bleiben. Gleichwohl kommt der VaR weiterhin in Risikotragfähigkeitskonzepten und zur Bestimmung der aufsichtlichen Mindestkapitalanforderungen mit internen Modellen nach CRR<sup>86</sup> zum Einsatz.<sup>87</sup>

### 3.2.2 Expected Shortfall

Der Expected Shortfall (kurz: ES) ermittelt den erwarteten Verlust oberhalb des Konfidenzniveaus  $\alpha$  des VaR. Es werden somit alle Verluste, die größer als der VaR sind, berücksichtigt. Anders ausgedrückt stellt der ES den Erwartungswert unter der Bedingung dar, dass der Verlust die VaR-Schwelle überschreitet. Dieser kann über die Mittelung aller Risikowerte, die größer als der VaR sind, berechnet werden. Graphisch betrachtet wird der Erwartungswert des Verlustes innerhalb der gestrichelten Fläche unter der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

---

<sup>83</sup> Vgl. Bartetzky, P., Gesamtbanksteuerung, 2012, S. 97; Hannemann, R. et al., MaRisk-Kommentar, 2013, S. 188; Hull, J., Risikomanagement, 2016, S. 318, 342, 359.

<sup>84</sup> Das Konzept von kohärenten Risikomaßen geht auf Artner, P. et al. zurück und soll an dieser Stelle nicht weiter vertieft werden. Für weitere Informationen siehe: Artner, P. et al., Kohärente Risikomaße, 1999.

<sup>85</sup> Siehe auch Kapitel 5.4.

<sup>86</sup> Interne Modelle können für Marktpreisrisiken des Handelsbuchs, für Kreditrisiken (IRB-Ansätze) und für operationelle Risiken (bezeichnet als AMA) genutzt werden. Mit Verabschiedung von Basel III im Dezember 2017 werden die Marktpreisrisiken zukünftig über den Expected Shortfall quantifiziert. Zudem wurde die Nutzungsmöglichkeit des AMA abgeschafft Vgl. BCBS, Basel III, 2017, S. 67.

<sup>87</sup> Vgl. McNeil, A. et al., QRM, 2005, S. 238 ff.; Großmann, S., Stresstests, 2006, S. 74 ff.; Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 103 ff.; Bartetzky, P., Gesamtbanksteuerung, 2012, S. 100, 102; Hull, J., Risikomanagement, 2016, S. 298 ff., 384, 389 f., 422.

in Abbildung 5 gesucht. Hierzu muss das Integral der Quantilfunktion  $F^{-1}$  für den Bereich  $\alpha$  bis 1 bestimmt werden (siehe Formel 14):<sup>88</sup>

$$\begin{aligned} \text{ES}(\alpha) &= E(x|x \geq \text{VaR}(\alpha)) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 \text{VaR}(u) du = \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 F^{-1}(u) du . \end{aligned} \tag{14}$$

Formel 14: Berechnung des Expected Shortfall

Der ES kann die beiden zuvor dargestellten Schwächen des VaR ausgleichen. So ist der ES subadditiv und berücksichtigt den vollständigen Randbereich der Verteilung. In der Praxis hat er sich dennoch bisher nicht durchgesetzt und ist kaum verbreitet. Die Berechnung des ES ist aufgrund der regelmäßig mangelnden Datenbasis in den Randbereichen der Wahrscheinlichkeitsverteilung erschwert. Es bestehen zudem Probleme bei der Überprüfung der Schätzgute anhand historischer Daten im Rahmen des Backtesting.<sup>89</sup>

### 3.3 Anforderungen an die Risikoaggregation

Für die Methoden zur Risikoaggregation existieren keine direkten aufsichtlichen Vorgaben. Die Aufsicht steht den im Rahmen der Aggregation auftretenden Diversifikationseffekten und dem hierdurch erzielbaren Einsparpotential an vorzuhaltendem Kapital insgesamt jedoch kritisch gegenüber. Sie stellt daher Anforderungen an den Ansatz von Diversifikationseffekten. Der Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht (kurz: BCBS) richtete eine Forschungsgruppe zur Untersuchung der Wechselwirkungen zwischen Kredit- und Marktpreisrisiken ein. In einem 2009 veröffentlichten Working Paper vertritt diese Forschungsgruppe die Ansicht, dass gerade bei einer Aggregation getrennt ermittelter Risikobeträge nicht durchweg von der Existenz der Diversifikationseffekte ausgegangen werden kann. Zwar werden risikomindernde Diversifikationseffekte durchaus anerkannt, jedoch wurden Situationen entdeckt, in denen sogar der gegenteilige Effekt auftreten kann und der Gesamtrisikobetrag höher als die Einzelrisiken wird (sog. genannter Compounding-Effekt). Dies kann zum Beispiel bei Fremdwährungs-, Carry-Trade-<sup>90</sup> sowie bei variabel verzinsten Krediten oder bei geschlossenen

---

<sup>88</sup> Vgl. McNeil, A. et al., QRM, 2005, S. 44; Großmann, S., Stresstests, 2006, S. 77; Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 117 f.; Bartetzky, P., Gesamtbanksteuerung, 2012, S. 102 f.; Hull, J., Risikomanagement, 2016, S. 298 f.

<sup>89</sup> Vgl. Mitschele, A., Integriertes Risikomanagement, 2009, S. 26; Bartetzky, P., Gesamtbanksteuerung, 2012, S. 103; Hannemann, R. et al., MaRisk-Kommentar, 2013, S. 189 f.; Hull, J., Risikomanagement, 2016, S. 299.

<sup>90</sup> Zur Ausnutzung von Zinsunterschieden in unterschiedlichen Währungen.



OTC Derivaten der Fall sein, wenn in der Risikorechnung nicht alle Risikotreiber der Position erfasst werden. Der Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht empfiehlt insofern, den Ansatz von risikomindernden Diversifikationseffekten kritisch zu hinterfragen und zu prüfen, ob nicht sogar risikoerhöhende Compounding-Effekte vorliegen.<sup>91</sup>

Dieser Position sind die europäischen Aufsichtsbehörden weiterhin treu. So berücksichtigt die Europäische Zentralbank (kurz: EZB) in Übereinstimmung mit der Leitlinie der European Banking Authority (kurz: EBA) zum aufsichtlichen Überprüfungs- und Bewertungsprozess bei der Berechnung der zusätzlichen Eigenmittelanforderungen (SREP-Kapitalzuschläge) keine Diversifikationseffekte zwischen den Risikoarten.<sup>92</sup> Zwar dürfen Institute Diversifikationseffekte im Rahmen der Risikoaggregation in ihren Risikotragfähigkeitskonzepten ansetzen, die EZB erwartet aber deren konservative Ermittlung. Zudem soll sichergestellt werden, dass die Risiken auch ohne Ansatz von Diversifikationseffekten bzw. beim Auftreten von risikoerhöhenden Compounding-Effekten vollständig durch Kapital gedeckt sind.<sup>93</sup>

Auch die nationale deutsche Aufsicht gibt keine konkreten Methoden zur Risikoaggregation vor. In AT 4.1 Tz. 6 MaRisk finden sich jedoch prinzipienbasierte Vorgaben zur Berücksichtigung von risikomindernden Diversifikationseffekten innerhalb oder zwischen Risikoarten. Diese Anforderungen lassen sich auf zwei Punkte verdichten. Die Analyse zur Bestimmung der Effekte muss erstens auf repräsentativen Daten beruhen, die die institutsindividuellen Verhältnisse wieder spiegeln, und zweitens gewährleisten, dass die Diversifikationseffekte auch in ungünstigen Marktphasen Bestand haben und daher als stabil angesehen werden können. Reine Expertenschätzungen werden nicht akzeptiert.<sup>94</sup>

Um die Repräsentativität der Daten zu gewährleisten, können am einfachsten eigene Zeitreihen zur Bestimmung der Abhängigkeiten genutzt werden. Hiermit wird die Forderung nach portfoliospezifischen Annahmen des AT 4.1 Tz. 6 MaRisk erfüllt und die Geschäfts- und Risikostruktur der Bank wird berücksichtigt.

---

<sup>91</sup> Vgl. BCBS, Interaction, 2009, S. 9 ff. und Referenzen hierin; Hannemann, R. et al., MaRisk-Kommentar, 2013, S. 232 f.

<sup>92</sup> Vgl. EBA, SREP Leitlinie, 2014, Tz. 329. Die 28 nationalen Aufsichtsbehörden der EU-Mitgliedsstaaten (außer Malta) berücksichtigen diese Vorgabe der EBA ebenfalls. Vgl. EBA, Compliance Table, 2015.

<sup>93</sup> Vgl. EZB, Leitfaden zum ICAAP, 2017, S. 13. Eine vergleichbare Position findet sich auch im Leitfaden der nationalen deutschen Aufsicht. Vgl. BaFin, Leitfaden, 2018, Tz. 62.

<sup>94</sup> Vgl. Hannemann, R. et al., MaRisk-Kommentar, 2013, S. 235, 237 f.; Klein, A. et al., Risikoaggregation, 2014, S. 20; Reuse, S., Diversifikationseffekte, 2016, S. 307 ff.

Der Rückgriff auf externe Daten ist über die Vorgaben des AT 4.1 Tz. 9 MaRisk an einen Nachweis der Repräsentativität gebunden. So dürfen Daten aus externen Quellen oder extern berechnete Abhängigkeiten, bspw. aus Pool-Lösungen im Genossenschafts- oder Sparkassenverbund, nicht unreflektiert übernommen werden. Das Institut ist in der Pflicht nachzuweisen, dass die genutzten Daten oder Parameter den tatsächlichen Verhältnissen entsprechen. Zudem muss die Bank bei Nutzung extern berechneter Abhängigkeiten Informationen zu wesentlichen Annahmen und Eingangsparametern einholen und diese nachvollziehen.<sup>95</sup>

In der Praxis werden zur Messung von Abhängigkeiten idealerweise die historischen Barwertänderungen oder Verlustverteilungen der zu aggregierenden Portfolios getrennt nach Risikoarten verwendet. Die in den einzelnen Zeitreihen erhaltenen Barwertänderungen dürfen nur aus der Einwirkung der jeweiligen Risikoart resultieren. Dabei müssen Barwertänderungen aufgrund von Portfolioänderungen, die keinen ökonomischen Gewinn oder Verlust aus einem Risikotreiber darstellen, eliminiert werden. Bei starken Portfolioveränderungen besteht die Gefahr, dass die Repräsentativität der historischen Zeitreihen nicht mehr gegeben ist. In diesem Fall kann auf synthetische Zeitreihen zurückgegriffen werden, die ausgehend von der aktuellen Portfoliozusammensetzung in die Vergangenheit zurückgerechnet werden.<sup>96</sup>

Um die Forderung der Abhängigkeitsstabilität in AT 4.1 Tz. 6 MaRisk zu erfüllen, müssen die Zeitreihen Daten aus konjunkturellen Auf- und Abschwungphasen beinhalten. Eine reine Durchschnittsbildung über den gesamten Konjunkturzyklus ist nur möglich, wenn die Diversifikationseffekte über den gesamten Zeitraum sehr stabil waren und keine Anhaltspunkte vorliegen, dass sich ihr Verhalten zukünftig grundlegend ändert. Sofern diese Voraussetzungen nicht erfüllt werden, können die Diversifikationseffekte maximal in der Höhe berücksichtigt werden, die in sehr ungünstigen Marktphasen auftritt. So kann eine konservative Berechnung sichergestellt werden und die Abhängigkeit ist auch in konjunkturellen Abschwungphasen oder ungünstigen Marktverhältnissen stabil. Zur

---

<sup>95</sup> Vgl. Hannemann, R. et al., MaRisk-Kommentar, 2013, S. 235 f.; Spielberg, H., Becher, F., Diversifikation, 2013, S. 33; BaFin, MaRisk, 2017, AT 4.1 Tz. 6, S. 8; BaFin, MaRisk-Erläuterungen, 2017, AT 4.1 Tz. 9, S. 13.

<sup>96</sup> Vgl. Hannemann, R. et al., MaRisk-Kommentar, 2013, S. 238; Spielberg, H., Becher, F., Diversifikation, 2013, S. 33; Klein, A. et al., Risikoaggregation, 2014, S. 18 f.

zusätzlichen Unterstützung der konservativen Vorgehensweise kann ein Sicherheitspuffer einkalkuliert werden, dessen Höhe sich nach der Robustheit der Methoden und Verfahren sowie der Datenhistorie richtet.<sup>97</sup>

Änderungen des ökonomischen Umfeldes oder Anpassungen der Geschäftsstrategie können die Geschäftstätigkeit der Bank beeinflussen und damit die den Abhängigkeiten zugrundeliegende Portfoliostruktur verändern. Daher sind die Verlässlichkeit und die Stabilität der Diversifikationsannahmen nach AT 4.1 Tz. 7 MaRisk regelmäßig sowie anlassbezogen zu überprüfen. Die regelmäßige Überprüfung umfasst dabei unter anderem die Zeitreihen (Relevanz, Qualität und Aktualität), die Berechnungsmethode und die Sensitivität der Diversifikationseffekte bezüglich unterschiedlicher Parametervariationen. Für die Anlassprüfung sind bereits im Vorfeld potentielle Ereignisse zu definieren, deren Eintritt überwacht werden kann. Diese Anforderung bezieht sich auch auf extern bezogene Leistungen wie bspw. extern bezogene Parameter.<sup>98</sup>

Die Auswirkungen von außergewöhnlichen, aber plausiblen Ereignissen auf die Abhängigkeitsannahmen soll im Rahmen von Stresstests gemäß AT 4.3.3 Tz. 1 MaRisk berücksichtigt werden. Hierbei kann unter anderem die Stabilität der Abhängigkeit unter ungünstigen Marktverhältnissen (z. B. bei sehr starken Konjunkturbrüchen) überprüft werden. Die unter normalen Bedingungen geltenden Diversifikationseffekte sind im Rahmen der Stresstestbetrachtungen kritisch zu hinterfragen und die Auswirkungen bei Wegfall dieser Effekte sind zu prüfen. Des Weiteren sollte eine Betrachtung stattfinden, unter welchen Bedingungen die Abhängigkeiten so ungünstig werden, dass die Risikotragfähigkeit nicht mehr sichergestellt ist.<sup>99</sup>

---

<sup>97</sup> Vgl. Hannemann, R. et al., MaRisk-Kommentar, 2013, S. 237 f.; BaFin, MaRisk-Erläuterungen, 2017, AT 4.1 Tz. 6, S. 11 f.

<sup>98</sup> Vgl. Hannemann, R. et al., MaRisk-Kommentar, 2013, S. 241; Spielberg, H., Becher, F., Diversifikation, 2013, S. 34.

<sup>99</sup> Vgl. Hannemann, R. et al., MaRisk-Kommentar, 2013, S. 237, 343 f.; BaFin, MaRisk-Erläuterungen, 2017, AT 4.3.3 Tz. 1, S. 18.

## 4 Konzepte zur Aggregation von Risiken

Die unterschiedlichen Konzepte zur Aggregation von einzelnen Risikoarten lassen sich in zwei Kategorien einteilen. Die sogenannten Bottom-up-Ansätze bestimmen das Gesamtrisiko über eine gemeinsame Modellierung der Risikotreiber aller Risikoarten (Aggregation auf niedrigster Ebene). Bei Top-down-Ansätzen werden hingegen die pro Risikoart getrennt quantifizierte Risikobeträge (Kennzahlenaggregation) oder die getrennt modellierten Verlustverteilungen (Verteilungsaggregation) über ein Modell zu einem Gesamtrisiko bzw. einer Gesamtverlustverteilung zusammengefasst (Aggregation auf höchster Ebene).<sup>100</sup>

Eine integrierte Risikomodellierung im Rahmen der Bottom-up-Ansätze überwindet die bisher vorherrschende getrennte Steuerung und Überwachung von einzelnen Risikoarten. Bei der Berechnung des Gesamtrisikos werden die Diversifikationseffekte implizit berücksichtigt. Ein solches Modell ist zwar verlässlicher als die anderen Aggregationsansätze, die Modellierung ist jedoch sehr anspruchsvoll und scheitert aktuell unter anderem an den unterschiedlichen Messansätzen der Risiken und den unterschiedlichen Risikobetrachtungshorizonten.<sup>101</sup> Insgesamt befinden sich die Bottom-up-Ansätze noch in der Entwicklungsphase.<sup>102</sup>

Die Varianz-Kovarianz-Ansätze, die die einzeln bestimmten Risikokennzahlen unter Berücksichtigung der paarweisen Korrelationen zusammenfassen, zählen zu den Top-down-Ansätzen. Zu diesen Ansätzen gehört als Spezialfall auch die weit verbreitete einfache Addition der Risikomaße. Eine fortgeschrittene Methode stellen die Copula-Modelle zur Aggregation der Verlustverteilungen dar. Hierbei wird eine Gesamtverlustverteilung über eine oder mehrere Copula-Funk-

---

<sup>100</sup> Vgl. BCBS, Interaction, 2009, S. 9; Mitschele, A., Integriertes Risikomanagement, 2009, S. 43 f.; für beispielhafte Studien zu beiden Ansätzen siehe S. 53; Skoglund, J. et al., Hierarchical Copulas, 2013, S. 189; Wehn, C., ICAAP, 2015, S. 114 f.

<sup>101</sup> Bei Marktpreisrisiken werden typischerweise Gewinne und Verluste bei der Modellierung berücksichtigt, während für Kreditrisikomodelle der Fokus auf den Verlusten liegt und Gewinne vernachlässigt werden. Vgl. BCBS, Interaction, 2009, S. 14; für weitere Hintergrundinformationen siehe ebd.

<sup>102</sup> Vgl. BCBS, Economic Capital, 2009, S. 28; BCBS, Interaction, 2009, S. 9, 13 f.; Mitschele, A., Integriertes Risikomanagement, 2009, S. 49 f.; für beispielhafte Studien zu diesem Ansatz siehe ebd.; Deutsche Bundesbank, Range of Practice, 2010, S. 23; Skoglund, J. et al., Hierarchical Copulas, 2013, S. 189; Wehn, C., ICAAP, 2015, S. 115.

tionen generiert, bei der die risikoartspezifischen Randverteilungen berücksichtigt werden.<sup>103</sup> Diese beiden Risikoaggregationsmodelle werden nachfolgend detailliert vorgestellt und beleuchtet.

#### 4.1 Varianz-Kovarianz-Ansätze

Die Varianz-Kovarianz-Ansätze basieren auf den einzelnen pro Risikoart quantifizierten Risikomaßen ( $K_i$ ). Die Bestimmung des Gesamtbank-Risikomaßes ( $G$ ) erfolgt dann mithilfe der linearen Korrelationspaare ( $\rho_{i,j}$ ) über Formel 15 (15a in Matrixschreibweise mit Korrelationsmatrix  $R$ ):<sup>104</sup>

$$G = \sqrt{\sum_{i=1}^n (K_i^2) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\rho_{i,j} \cdot K_i \cdot K_j)} \quad (15)$$

$$G = \sqrt{\begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix}^T R \begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix}} = \sqrt{\begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \rho_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n,1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix}}. \quad (15a)$$

Formel 15: Risikoaggregation im Varianz-Kovarianz-Ansatz

Dieses Vorgehen leitet sich aus der Berechnung der Portfoliovarianz in der Portfoliotheorie von Markowitz ab.<sup>105</sup> Im Rahmen der Umformung wurde die Annahme getroffen, dass die Quantilfunktionen der einzelnen univariaten Risikoverteilungen der Quantilfunktion des Gesamtportfolios entsprechen. Dies ist nur bei elliptischen Verteilungen, wie der multivariaten Normalverteilung, der Fall. Zudem wird nur bei diesem Verteilungstyp die Abhängigkeit der Risikofaktoren vollständig durch die lineare Korrelationsmatrix bestimmt.<sup>106</sup>

<sup>103</sup> Vgl. Mitschele, A., Integriertes Risikomanagement, 2009, S. 45 f.; BCBS, Risk Aggregation, 2010, S. 16, 72; CEBS, Position Paper, 2010, S. 7.

<sup>104</sup> Vgl. FMA, ÖNB, Quantitative Modelle, 2004, S. 34, 39; Wiesemann, H., Risikostreuung, 2011, S. 424; Skoglund, J. u. a., Hierarchical Copulas, 2013, S. 191.

<sup>105</sup> Für die Herleitung siehe bspw.: Saita, F., Aggregation, 2004, S. 27; Rosenberg, J., Schuermann, T., Integrated Risk Management, 2006, S. 574 f.; Inanoglu, H., Jacobs, M., Risk Aggregation, 2009, S. 131 ff.

<sup>106</sup> Vgl. FMA, ÖNB, Quantitative Modelle, 2004, S. 34 f., 38; Saita, F., Aggregation, 2004, S. 25 ff.; Rosenberg, J., Schuermann, T., Integrated Risk Management, 2006, S. 575.

Über den Varianz-Kovarianz-Ansatz können zwei Spezialfälle abgebildet werden.<sup>107</sup> Bei Verwendung einer Korrelationsmatrix, die vollständig aus Einsen besteht (siehe Formel 16), wird eine vollständig positive Korrelation unterstellt. Es handelt sich hierbei um die einfache Addition der Risikokennzahlen ohne die Berücksichtigung von Diversifikationseffekten. Der zweite Spezialfall ist die Nutzung einer Einheitsmatrix mit Korrelationen von null (siehe Formel 16a). Dies impliziert die vollständige Unkorreliertheit zwischen den Risiken.<sup>108</sup>

$$G = \sqrt{\begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix}} = \sum_{i=1}^n (K_i) \quad (16)$$

$$G = \sqrt{\begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (K_i^2)}. \quad (16a)$$

Formel 16: Spezialfälle des Varianz-Kovarianz-Ansatzes

#### 4.1.1 Methodische Voraussetzungen

Um einzelne Risikokennzahlen sinnvoll zusammenzufassen, müssen diese einheitlich und überschneidungsfrei berechnet worden sein. Die Einheitlichkeit betrifft die Wahl des Risikomaßes, des Konfidenzniveaus und des Zeithorizontes. Zudem sollte die Datengrundlage (insbesondere Zeitraum und Frequenz), die für die Quantifizierung der Risiken verwendet wurde, vergleichbar sein.<sup>109</sup>

Grundlegend ist zunächst festzulegen, welche Risikoarten einbezogen werden können und sollen. So kann das Zahlungsunfähigkeitsrisiko, das durch einen Liquiditätspuffer gedeckt wird, nicht sinnvoll mit anderen Verlustrisiken, für die

<sup>107</sup> Ein Spezialfall im weiteren Sinne stellt die Annahme einer multivariaten Normalverteilung dar. Hierbei folgen alle Randverteilungen einer Normalverteilung. Aufgrund der realitätsfremden Annahme wird dieser Spezialfall hier nicht explizit dargestellt. Sofern eine Umsetzung dieser Annahme gewünscht ist, können die aus den Normalverteilungen berechneten einzelnen Risikowerte ohne Weiteres als Eingangsparameter (K) in Formel 15 genutzt werden. Siehe hierzu: Rosenberg, J., Schuermann, T., *Integrated Risk Management*, 2006, S. 576.

<sup>108</sup> Vgl. BCBS, *Risk Aggregation*, 2010, S. 72, 74; Skoglund, J. et al., *Hierarchical Copulas*, 2013, S. 191.

<sup>109</sup> Vgl. BCBS, *Economic Capital*, 2009, S. 25 f.; Bartetzky, P., *Gesamtbanksteuerung*, 2012, S. 107; Klein, A. et al., *Risikoaggregation*, 2014, S. 18.

ein Eigenkapitalpuffer vorzuhalten ist, zusammengefasst werden. Im Idealzustand sollen die Risikokennzahlen überschneidungsfrei alle wesentlichen Risiken abdecken. In der Praxis bestehen hier insbesondere bei dem Credit-Spread-Risiko Schwierigkeiten, da dieses Risiko sowohl durch Bonitätsveränderungen des Schuldners (Kreditrisiko) als auch durch die Entwicklung auf den Kapitalmärkten (Marktpreisrisiko) beeinflusst wird. Um aus Gründen der aufsichtlich geforderten Konservativität bei der Aggregation keine Lücke entstehen zu lassen, ist es im Zweifel besser Teilrisiken doppelt als überhaupt nicht zu berücksichtigen.<sup>110</sup>

Bei der Auswahl des Risikomaßes ist zu beachten, dass alle einzubeziehenden Risiken über dieses abgebildet werden können. Es bietet sich daher die Verwendung des Value-at-Risk oder des Expected Shortfall an. Ein uneinheitliches Konfidenzniveau sorgt für zusätzliche Komplexität und sollte vermieden werden, da die nachträgliche Skalierung zu Ungenauigkeiten führen kann. Es ist bei der Wahl des Niveaus zusätzlich zu beachten, dass Risiken mit hohen Wahrscheinlichkeiten in den Rändern der Wahrscheinlichkeitsverteilung mit steigendem Konfidenzniveau das Gesamtrisiko dominieren.<sup>111</sup>

Die Wahl einheitlicher Zeithorizonte ist die herausforderndste Voraussetzung. Der Risikobetrachtungshorizont in aufsichtlichen Risikotragfähigkeitskonzepten beträgt ein Jahr.<sup>112</sup> Die bei der Risikoquantifizierung angenommene Haltedauer illiquider Positionen (z. B. Kredite) stimmt hiermit überein. Das Marktpreisrisiko von handelbaren Vermögensgegenständen (bspw. die Positionen des Handelsbuchs) wird in der Regel mit einer kürzeren Haltedauer berechnet. Dies wird u. a. mit der Möglichkeit des vorzeitigen Schließens der Positionen durch Verkauf oder Abschluss von Sicherungsgeschäften begründet. Hierdurch sind die Risiken jedoch nicht mehr unmittelbar vergleichbar. Zudem fehlt beim vorzeitigen Schließen von Positionen ein Gegenstück zu den anderen Risiken, wenn Diversifikationseffekte zwischen den Risikoarten berücksichtigt werden. In diesem Fall muss die Haltedauer nachträglich vereinheitlicht werden. Der Risikobetrag des Marktpreisrisikos kann hierzu über die Wurzel-t-Formel skaliert werden.

---

<sup>110</sup> Vgl. Bartetzky, P., Gesamtbanksteuerung, 2012, S. 42, 106; Klein, A. et al., Risikoaggregation, 2014, S. 18.

<sup>111</sup> Vgl. BCBS, Economic Capital, 2009, S. 3, 25 f.; Bartetzky, P., Gesamtbanksteuerung, 2012, S. 107.

<sup>112</sup> Vgl. BaFin, Leitfaden, 2018, Tz. 50.

Hierbei wird allerdings die vereinfachende Annahme einer Normalverteilung des Marktpreisrisikos unterstellt, was zu Verzerrungen führen kann.<sup>113</sup>

#### 4.1.2 Einsatz unter Berücksichtigung der aufsichtlichen Anforderungen

Kern der Varianz-Kovarianz-Ansätze stellt die Schätzung der einzelnen linearen Korrelationen zwischen den Risikoarten dar, die in die Korrelationsmatrix eingesetzt werden. Hierzu kann z. B. der Stichprobenschätzer aus Formel 2 genutzt werden, der alle Beobachtungen gleich gewichtet. Ebenso sind jedoch auch gewichtete Korrelationsschätzer nutzbar, wie der exponentiell gewichtete gleitende Durchschnittsschätzer aus dem sogenannten Exponentially-Weighted-Moving-Average-Modell (kurz: EWMA-Modell).<sup>114</sup> Auch die dynamischen Korrelationsschätzer aus dem Dynamic-Conditional-Correlation-Modell (kurz: DCC-Modell)<sup>115</sup> können verwendet werden.<sup>116</sup>

Unabhängig vom konkret verwendeten Korrelationsmodell bestimmt die Korrelationsmatrix den Umfang der angesetzten Diversifikationseffekte.<sup>117</sup> Die Schätzung einer verlässlichen, stabilen Matrix stellt daher eine besondere Herausforderung dar, da neben den statistischen auch die aufsichtsrechtlichen Anforderungen berücksichtigt werden müssen. Zur Erfüllung der aufsichtlichen Anforderung an die Stabilität der verwendeten Abhängigkeiten gibt es unterschiedliche Herangehensweisen.

So bietet es sich bei Verwendung des Stichprobenschätzers an, innerhalb der Zeitreihe, die mindestens einen Konjunkturzyklus (in der Regel 6 bis 10 Jahre) umfassen muss, Zeitfenster mit erhöhter Korrelation zu identifizieren und diese für die Risikoaggregation zu verwenden. Sofern nicht das errechnete Maximum der Korrelation verwendet werden soll, ist dies nur in begründeten Ausnahmefällen möglich. Bei der Berechnung muss die Größe (Anzahl der Monate im Fenster) und die Lage der Zeitfenster festgelegt werden. Die Fenstergröße soll einerseits so lang sein, dass ein statistisch valider Wert entsteht, und andererseits so kurz sein, dass Zeiträume mit höherer Korrelation nicht mit Zeiträumen

---

<sup>113</sup> Vgl. BCBS, Economic Capital, 2009, S. 3, 26; Bartetzky, P., Gesamtbanksteuerung, 2012, S. 108; Wehn, C., von Zanthier, U., Ökonomische Kapitalsteuerung, 2012, S. 173 f.

<sup>114</sup> Siehe bspw.: Hull, J., Risikomanagement, 2016, S. 273 oder Adams, Z. et al., Correlations, 2017, S. 16.

<sup>115</sup> Siehe bspw.: Weiß, G., Copula-GARCH-Modelle, 2011, S. 550 ff. oder Adams, Z. et al., Correlations, 2017, S. 16 f.

<sup>116</sup> Vgl. Böcker, K., Quantifying Risk, 2008, S. 95; Pérignon, C., Smith, D., Diversification, 2010, S. 56; zur Problematik der Entscheidung für ein Verfahren siehe auch Kapitel 2.5.

<sup>117</sup> Vgl. Li, J. et al., Aggregation, 2015, S. 185.



niedriger Korrelation vermischt werden. Auch die Lage des Zeitfensters beeinflusst die Korrelation. Hierbei ist zu entscheiden, ob die Lage für alle Risikoartpaare einheitlich oder individuell pro Paar festgelegt wird. Gerade bei der Wahl uneinheitlicher Größen und Lagen der Zeitfenster zur Maximierung der Abhängigkeiten kann es zu nicht mehr positiv semidefiniten Korrelationsmatrizen kommen.<sup>118</sup> Es muss zudem berücksichtigt werden, dass Risikoarten auch mit einem Zeitverzug voneinander abhängig sein können. Daher sind im Rahmen der Berechnung auch Verschiebungen der Zeitreihen vorzunehmen.<sup>119</sup> Diese grundsätzliche Vorgehensweise kann auch auf andere Korrelationsmodelle übertragen werden. Neben Fensterlage und -größe muss bspw. im Rahmen der EWMA-Modelle zusätzlich auch ein Gewichtungssparameter bestimmt werden, der die Gewichtung älterer Beobachtungen bei der Berechnung der Korrelation festlegt.<sup>120</sup>

### 4.1.3 Vorzüge und Probleme der Varianz-Kovarianz-Ansätze

Zu den größten Vorzügen der Varianz-Kovarianz-Ansätze zählt die Einfachheit der Methode. So kann die Aggregation der Risiken analytisch ohne Simulationsverfahren erfolgen und die berechneten Ergebnisse können einfach kommuniziert und nachvollzogen werden. Die benötigte Parameteranzahl ist relativ gering, da neben den bereits vorhandenen Risikokennzahlen nur die Korrelationen der Risikofaktoren untereinander bestimmt werden müssen. Die Schätzung der Korrelationen ist einfach durchzuführen und nachvollziehbar, was es erleichtert, die aufsichtlichen Anforderung an die Stabilität der Korrelationen unter ungünstigen Marktphasen nachzuweisen. In diesem Zusammenhang kann es jedoch zu Problemen kommen, wenn die Korrelationen nur anhand der aufsichtlichen Vorgabe gewählt werden. Es muss bei der Wahl der Korrelationen zusätzlich darauf geachtet werden, dass die entstehende Korrelationsmatrix positiv semidefinit ist.<sup>121</sup>

---

<sup>118</sup> Diese Eigenschaft verhindert, dass der Ausdruck unter der Wurzel in Formel 15a negativ wird. Bei Inkonsistenzen innerhalb der Korrelationsmatrix ist diese Anforderung verletzt. Zur Definition einer positiv semidefiniten Matrix siehe bspw.: BCBS, Risk Aggregation, 2010, S. 90 ff.; Hull, J., Risikomanagement, 2016, S. 274 f.

<sup>119</sup> Vgl. Spielberg, H., Becher, F., Diversifikation, 2013, S. 31 f.; für Hinweise zur Festlegung des Zeitraumes eines Konjunkturzyklus siehe ebd.; Klein, A. et al., Risikoaggregation, 2014, S. 21; für Hinweise zu Wahl der Fenstergröße und -lage in der Praxis siehe ebd.

<sup>120</sup> Vgl. Hull, J., Risikomanagement, 2016, S. 273.

<sup>121</sup> Vgl. Rosenberg, J., Schuermann, T., Integrated Risk Management, 2006, S. 612; BCBS, Risk Aggregation, 2010, S. 16, 72; Klein, A. et al., Risikoaggregation, 2014, S. 25; Li, J. et al., Aggregation, 2015, S. 169.

In der Grundform des Ansatzes werden die tatsächlichen Korrelationen der Daten und die tatsächlichen Randverteilungen der Risikofaktoren berücksichtigt, da die Korrelationen und die zu aggregierenden Risikowerte nahezu frei bestimmt werden können. Bei Anwendung der Spezialfälle (einfache Addition oder unkorrelierte Zusammenfassung) werden die Korrelationen hingegen fest vorgegeben ( $\rho_{i,j} = 1$  oder  $\rho_{i,j} = 0$ ). Die Aussage, dass die einfache Addition ein besonders konservatives Vorgehen darstellt, ist nicht allgemeingültig, da der VaR nicht in jedem Fall subadditiv ist.<sup>122</sup> Dennoch deuten mehrere wissenschaftliche Studien daraufhin, dass das Gesamtrisiko bei Anwendung dieses Verfahrens regelmäßig überschätzt wird.<sup>123</sup>

Die Varianz-Kovarianz-Ansätze stellen bestimmte Anforderungen an die Eigenschaften der zugrundeliegenden Verteilungen. Sofern die Randverteilungen und die Gesamtverteilung nicht dem gleichen elliptischen Verteilungstyp (z. B. einer multivariaten Normalverteilung) entsprechen, kommt es zu Verzerrungen bei der Berechnung des Gesamtrisikos. Zudem können die verwendeten linearen Korrelationen nur im Fall der elliptischen Verteilungen die beobachtete Abhängigkeitsstruktur vollständig erfassen.<sup>124</sup> Die Exaktheit der Gesamtrisikoschätzung wird daher dadurch bestimmt, wie weit diese Annahmen in der Realität erfüllt werden. Die Anforderung an die Verteilungen stellt die größte methodische Schwäche dieser Ansätze dar. Während die Annahme einer elliptischen Verteilung bei Marktpreisrisiken noch annähernd als erfüllt betrachtet werden kann, ist diese Annahme für das Kreditrisiko und das operationelle Risiko aufgrund der charakteristischen Eigenschaften dieser Risikoarten nicht haltbar.<sup>125</sup>

Weitere Probleme können aus der Schätzung der Korrelationsmatrix resultieren. So werden die Modellrisiken aus den Korrelationsmodellen z. B. hinsichtlich der

---

<sup>122</sup> Siehe Kapitel 3.2.1.

<sup>123</sup> Vgl. Rosenberg, J., Schuermann, T., *Integrated Risk Management*, 2006, S. 576; BCBS, *Economic Capital*, 2009, S. 27 f.; Inanoglu, H., Jacobs, M., *Risk Aggregation*, 2009, S. 133; Klein, A. et al., *Risikoaggregation*, 2014, S. 18; Li, J. et al., *Aggregation*, 2015, S. 162, 168 f., 186.

<sup>124</sup> Siehe Kapitel 2.1.

<sup>125</sup> Vgl. FMA, ÖNB, *Quantitative Modelle*, 2004, S. 40; Rosenberg, J., Schuermann, T., *Integrated Risk Management*, 2006, S. 576; Inanoglu, H., Jacobs, M., *Risk Aggregation*, 2009, S. 133; BCBS, *Risk Aggregation*, 2010, S. 16; Bartetzky, P., *Gesamtbanksteuerung*, 2012, S. 108; Li, J. et al., *Aggregation*, 2015, S. 162, 169. Siehe Kapitel 5.4.

zeitlichen Stabilität übernommen.<sup>126</sup> Zudem stammen die für die Schätzung benötigten Daten aus der Vergangenheit, sodass sich zwischenzeitlich die Portfoliozusammensetzung und die Korrelationen geändert haben können.<sup>127</sup>

## 4.2 Copula-Modelle

Copula-Modelle überwinden die starren Annahmen der Varianz-Kovarianz-Ansätze bezüglich der zugrundeliegenden Verteilungen und der linearen Abhängigkeit. Bei diesen Modellen können durch den Satz von Sklar<sup>128</sup> beliebige univariate Verteilungen mit einer Abhängigkeitsstruktur zu einer individuellen multivariaten Gesamtverteilung zusammengefasst werden. Hierdurch ist es möglich, die Generierung der Gesamtverteilung in zwei Schritte aufzuteilen. Die Modellierung der univariaten Verteilungsfunktionen für die einzelnen Risikoarten kann getrennt von der Wahl einer Copula-Funktion, die die Abhängigkeiten zwischen den Risikoarten beschreibt, durchgeführt werden. In dieser bleiben die Informationen zu den Verteilungen der einzelnen Risikoarten vollständig als Randverteilungen erhalten. Zur Verdichtung der multivariaten Verteilung in eine Kennzahl kann über ein Simulationsverfahren anschließend ein Risikomaß bestimmt werden.<sup>129</sup>

Die einzelnen Verlustverteilungen können frei an die jeweiligen Risikoarten angepasst werden.<sup>130</sup> Sie sollten jedoch zur Erleichterung der Aggregation das Risiko in einer identischen Einheit messen (z. B. Verlust in Euro oder relativer Verlust im Verhältnis zum Exposure) und analog zum Varianz-Kovarianz-Ansatz auf einer vergleichbaren Datengrundlage beruhen.<sup>131</sup>

Die Wahl und Parametrisierung einer Copula-Funktion zur Modellierung der Abhängigkeiten zwischen den Risikoarten stellt eine Hauptaufgabe bei Verwendung eines Copula-Modells dar, auf die in den nachfolgenden Kapiteln geson-

---

<sup>126</sup> Siehe Kapitel 2.5.

<sup>127</sup> Vgl. FMA, ÖNB, Quantitative Modelle, 2004, S. 40 f.

<sup>128</sup> Siehe Kapitel 2.4.1.

<sup>129</sup> Vgl. Rosenberg, J., Schuermann, T., Integrated Risk Management, 2006, S. 576 f.; Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 266 f.; BCBS, Risk Aggregation, 2010, S. 76 f.; Cherubini, U. et al., Copula, 2012, S. 12; Wehn, C., von Zanthier, U., Ökonomische Kapitalsteuerung, 2012, S. 171; Li, J. et al., Aggregation, 2015, S. 164.

<sup>130</sup> Vgl. Mitschele, A., Integriertes Risikomanagement, 2009, S. 47; für die Modellierung von univariaten Verlustverteilungsfunktionen einzelner Risikoarten siehe bspw.: Hull, J., Risikomanagement, 2016.

<sup>131</sup> Vgl. Rosenberg, J., Schuermann, T., Integrated Risk Management, 2006, S. 581; Hull, J., Risikomanagement, 2016, S. 618.

dert eingegangen wird. Nach der Spezifizierung der Copula wird das Gesamtrisiko in mehreren Schritten bestimmt. Da geschlossene Formen für die Copula-Funktionen nicht immer vorliegen (z. B. bei der Gauß- oder t-Copula), kann die Bestimmung des Risikomaßes in diesen Fällen nicht analytisch erfolgen. Es muss auf eine Monte-Carlo-Simulation zurückgegriffen werden.<sup>132</sup> Dabei werden aus der Verteilung der Copula-Funktion zunächst gemeinsame Zufallsvariablen gezogen ( $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n$ ). Diese gleichverteilten Zufallsvariablen können über die Quantilfunktionen der Risikoarten in die entsprechenden Verlustausprägungen der jeweiligen Risikoart transformiert werden ( $F_1^{-1}(\tilde{u}_1), \dots, F_n^{-1}(\tilde{u}_n)$ ). Anschließend werden die simulierten Verluste über Formel 17 zu einem Gesamtbankportfolioverlust ( $\overline{PL}$ ) addiert:<sup>133</sup>

$$\overline{PL} = F_1^{-1}(\tilde{u}_1) + \dots + F_n^{-1}(\tilde{u}_n) = \sum_{i=1}^n F_i^{-1}(\tilde{u}_i). \quad (17)$$

Formel 17: Aggregation der simulierten Verluste im Copula-Modell

Dieses Vorgehen wird mehrmals wiederholt. Mit steigender Anzahl an Durchläufen konvergieren die simulierten Gesamtverluste gegen die Gesamtverlustverteilung. Da diese empirische Verteilung sich der wahren Verteilung annähert, kann das ausgewählte Risikomaß für das Gesamtbankrisiko (z. B. VaR oder ES) anhand der so generierten empirischen Verteilung bestimmt werden.<sup>134</sup>

#### 4.2.1 Auswahl einer Copula-Funktion

Die Wahl einer geeigneten Copula-Funktion zur Risikoaggregation stellt eine besondere Herausforderung dar, weil es aktuell keine vollumfänglich befriedigenden mathematischen Auswahltests gibt.<sup>135</sup> Vielmehr müssen unterschiedliche Faktoren beachtet werden. Hierzu können z. B. die deskriptiven Kennzahlen der Portfolios zählen.<sup>136</sup> Zudem sollten die Auswirkungen der Wahl auf die Modellierungsergebnisse berücksichtigt werden. Insbesondere die unterschiedlichen Randabhängigkeiten der Copula-Funktionen haben Einfluss auf die Messung des Gesamtrisikos, da höhere Randabhängigkeiten zu höheren Risikowerten

---

<sup>132</sup> Für eine detaillierte Darstellung der Simulationstechnik bei Copula-Funktionen siehe bspw.: Rosenberger, J., Schuermann, T., *Integrated Risk Management*, 2006, S. 578 f.; Schmidt, T., *Copula*, 2006, S. 18 ff.

<sup>133</sup> Vgl. BCBS, *Risk Aggregation*, 2010, S. 76 f.; Li, J. et al., *Aggregation*, 2015, S. 170.

<sup>134</sup> Vgl. BCBS, *Risk Aggregation*, 2010, S. 77; Li, J. et al., *Aggregation*, 2015, S. 170.

<sup>135</sup> Die Goodness-of-fit-Tests erwiesen sich als nicht zuverlässig. Vgl. Weiß, G., *Copula-GARCH-Modelle*, 2011, S. 567 f.; zur generellen Funktionsweise der Tests siehe ebd., S. 559 f.

<sup>136</sup> Vgl. Weiß, G., *Copula-GARCH-Modelle*, 2011, S. 569 f.

führen.<sup>137</sup> *Rosenberg und Schuermann* stellen in ihrer Studie fest, dass diese Wahl eine mäßige Auswirkung auf die Höhe des Gesamtrisikos hat. Sie nutzten jedoch nur Copula-Funktionen aus der elliptischen Familie (u. a. Gauß- und t-Copula mit 5 und 10 Freiheitsgraden).<sup>138</sup>

Die asymmetrischen Randabhängigkeiten aus der archimedischen Copula-Familie (z. B. die obere Randabhängigkeit der Gumbel-Copula) stellen zwar eine realitätsnahe Eigenschaft zur Risikomodellierung dar, zur Aggregation von mehr als zwei Risikofaktoren sind diese Copulas in der Grundform aber ungeeignet. Sie setzen durch die Spezifizierung mit nur einem Generatorparameter ( $\theta$ ) das gleiche Abhängigkeitsverhalten zwischen allen einbezogenen Risikopaaren voraus. Unterschiede in den paarweisen Abhängigkeiten können nicht berücksichtigt werden. Diese methodische Voraussetzung ist nicht realistisch, da sich nicht alle Risikoarten gleich verhalten. Zusätzlich erfordern die Copulas dieser Familie im Vergleich zur Gauß- oder t-Copula einen größeren Aufwand bei der Simulation. Gumbel- und Clayton-Copula können zudem keine negativen Abhängigkeiten abbilden.<sup>139</sup>

Abhilfe können hier sogenannte hierarchische Copula-Modelle schaffen. Bei diesen Modellen werden nicht alle Risikoarten über eine einzige Copula berücksichtigt. Vielmehr werden die Risiken in Teilmengen aggregiert und die entstehende (Teil-)Verlustverteilung wird auf nächsthöherer Ebene mit weiteren Risiken zusammengefasst. So kann das Gesamtrisiko über mehrere Ebenen quantifiziert werden. Die Auswahl der jeweiligen Copulas kann dabei frei erfolgen. Es können daher neben einer reinen Aggregation mit (zweidimensionalen) archimedischen Copulas auch andere Copula-Funktionen verwendet werden. Die Parametrisierung auf den einzelnen Stufen unterscheidet sich nicht von der Schätzung einer einzelnen Copula. Es entstehen durch die Verwendung mehrerer Copulas jedoch höhere Modellrisiken. Die Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Risiken verringert sich konstruktionsbedingt bereits mit steigender Anzahl an Aggregationsebenen, wodurch die Diversifikationseffekte ohne ökonomischen Hintergrund steigen. Zudem wird nicht die vollständige Abhängigkeitsstruktur zwischen allen einbezogenen Risikoarten modelliert.<sup>140</sup>

---

<sup>137</sup> Vgl. Li, J. et al., *Aggregation*, 2015, S. 184.

<sup>138</sup> Vgl. Rosenberg, J., Schuermann, T., *Integrated Risk Management*, 2006, S. 571, 607.

<sup>139</sup> Vgl. BCBS, *Risk Aggregation*, 2010, S. 79, 82; Mai, J., Scherer, M., *Abhängigkeiten*, 2012, S. 9; Li, J. et al., *Aggregation*, 2015, S. 172.

<sup>140</sup> Vgl. Bruneton, J., *Hierarchical Aggregation*, 2011, S. 18, 22, 27; Skoglund, J. et al., *Hierarchical Copulas*, 2013, S. 198.

Vor diesem Hintergrund werden insbesondere die elliptischen Copulas zur Risikoaggregation verwendet, da diese keine Anforderung an die Symmetrie der Abhängigkeitsstruktur zwischen den Variablen stellen. In der Korrelationsmatrix können analog zum Varianz-Kovarianz-Ansatz die Abhängigkeiten zwischen allen Risikoartpaaren nahezu frei gewählt werden, solange die Matrix positiv semidefinit bleibt. Speziell die t-Copula eignet sich aufgrund ihrer Randabhängigkeiten zur realitätsnahen Risikoaggregation. Dabei muss in Kauf genommen werden, dass die Randabhängigkeiten symmetrisch auftreten.<sup>141</sup>

Auch wenn die t-Copula den für eine realitätsnahe Modellierung notwendigen Eigenschaften sehr nahekommt, kann keine Copula-Funktion in ihrer Reinform alle gewünschten Eigenschaften (asymmetrische obere Randabhängigkeit und asymmetrische Abhängigkeitsstrukturen zwischen den Risikoartpaaren) gleichzeitig auf sich vereinen. Die Kombination einer t-Copula (asymmetrische Abhängigkeitsstruktur) und einer Gumbel-Copula (obere Randabhängigkeit) würde die Vorteile beider Copula-Funktionen verbinden. Dies kann über eine sogenannte Mixture-Copula ( $C^M$ ) erreicht werden. In Mixture-Copulas werden beliebige Copula-Funktionen über einen Gewichtungsfaktor ( $w$ ), der in Summe Eins ergeben muss, kombiniert (siehe Formel 18):<sup>142</sup>

$$C_{v,R,\theta}^M(u_1, \dots, u_n) = w C_{v,R}^t(u_1, \dots, u_n) + (1 - w) C_{\theta}^G(u_1, \dots, u_n). \quad (18)$$

Formel 18: Mixture-Copula aus t- und Gumbel-Copula

Im Ergebnis besitzt diese Mixture-Copula eine höhere obere Randabhängigkeit als die eigenständige t-Copula. Die zusätzliche Flexibilität geht jedoch mit einer höheren Komplexität einher. Insbesondere durch die steigende Anzahl an Parametern erhöht sich der Schätzaufwand und die Schätzgenauigkeit sinkt. Somit entsteht ein höheres Modellrisiko.<sup>143</sup> *Weiß* stellte in seiner empirischen Untersuchung fest, dass sich die Mixture-Copula (aus t- und den drei archimedischen Copulas) bei einer zeitabhängigen Modellierung nicht zur Schätzung des VaR eignete, da sie bereits im bivariaten Fall numerisch instabil war.<sup>144</sup>

<sup>141</sup> Vgl. BCBS, Risk Aggregation, 2010, S. 79, 82; Li, J. et al., Aggregation, 2015, S. 172 f.

<sup>142</sup> Vgl. Li, J. et al., Aggregation, 2015, S. 173.

<sup>143</sup> Vgl. Li, J. et al., Aggregation, 2015, S. 173.

<sup>144</sup> Vgl. Weiß, G., Copula-GARCH-Modelle, 2011, S. 573 f.

#### 4.2.2 Parametrisierung der Copula-Funktion unter Berücksichtigung der aufsichtlichen Anforderungen

Durch die Auswahl einer Copula-Funktion werden gleichzeitig die benötigten Eingangsparameter festgelegt. Bei den elliptischen Copula-Familien wird die Korrelationsmatrix ( $R$ ) und für die t-Copula zusätzlich die Anzahl der Freiheitsgrade ( $\nu$ ) benötigt. Die archimedischen Copulas werden lediglich über den Generatorparameter ( $\theta$ ) spezifiziert. Zur Schätzung der Copula-Parameter können parameterfreie, semi-parametrische oder parametrische Verfahren genutzt werden.<sup>145</sup>

Parameterfreie Verfahren spezifizieren die Copula und die Randverteilungen anhand der Daten, ohne dass eine Copula-Funktion ausgewählt oder eine Annahme über die Randverteilungen getroffen werden muss. Zu diesem Verfahrenstyp zählt die empirische Copula von Deheuvels. Die resultierende Copula ist nicht stetig und die Werte zwischen den diskreten Punkten müssen multilinear interpoliert werden. Daher muss die Stichprobe genügend Daten für eine verlässliche Schätzung umfassen. Insbesondere diese Anforderung wird in der Praxis regelmäßig nicht erfüllt. Daher werden diese Verfahren nicht weiter beleuchtet.<sup>146</sup>

Bei den semi-parametrischen Schätzverfahren werden nur die Parameter der Copula-Funktion geschätzt. Hierzu muss allerdings eine spezifische Copula-Funktion ausgewählt werden. Zu den Randverteilungen müssen jedoch keine Annahmen getroffen werden. Die Parametrisierung auf Basis der Abhängigkeitsmaße der Stichprobe gehört zu diesen Verfahren. Da die linearen Korrelationskoeffizienten nach Bravais-Pearson auch von den unbekanntem tatsächlichen Randabhängigkeiten beeinflusst werden, würde die Copula bei Nutzung einer Bravais-Pearson-Korrelationsmatrix nicht mehr unabhängig von den Randverteilungen sein. Darum wird die Korrelationsmatrix mit Hilfe der Rangkorrelationen aus Kapitel 2.3 geschätzt. Die Rangkorrelationen können ohne Annahme über die Randverteilung direkt aus den beobachteten Daten berechnet und über bekannte Zusammenhänge in die Korrelationen der Copula transformiert werden.<sup>147</sup>

---

<sup>145</sup> Vgl. Hlawatsch, S., Reichling, P., Copula, 2010, S. 9.

<sup>146</sup> Vgl. Hlawatsch, S., Reichling, P., Copula, 2010, S. 9 f.; für weitere Informationen siehe ebd. oder Cherubini, U. et al., Copula, 2004, S. 161 f.

<sup>147</sup> Vgl. BCBS, Risk Aggregation, 2010, S. 80; Hlawatsch, S., Reichling, P., Copula, 2010, S. 11; Skoglund, J. et al., Hierarchical Copulas, 2013, S. 195 f.

Bei Wahl einer Gauß-Copula kann die Korrelationsmatrix mit Hilfe von Spearmans Rangkorrelationskoeffizienten berechnet werden. Formel 19 stellt das Verhältnis zwischen den geschätzten Spearmans Rangkorrelationskoeffizienten ( $\widehat{\rho}_S$ ) und den Korrelationsschätzern in der Korrelationsmatrix der Gauß-Copula ( $\widehat{\rho}$ ) dar. Da beide Schätzer näherungsweise übereinstimmen, können die berechneten Spearmans Rangkorrelationen vereinfachend auch direkt als Eingangspareparameter genutzt werden.<sup>148</sup>

$$\widehat{\rho}_S(X_i, X_j) = \frac{6}{\pi} \sin^{-1} \left( \frac{1}{2} \widehat{\rho}_{i,j} \right) \approx \widehat{\rho}_{i,j}. \quad (19)$$

Formel 19: Zusammenhang zwischen Spearmans Rangkorrelationskoeffizient und Korrelation der Gauß-Copula

Für die Korrelationsmatrix der t-Copula ist die Beziehung zum Spearmans Rangkorrelationskoeffizienten nicht in geschlossener Form verfügbar. Daher wird auf eine Beziehung zu Kendalls Tau zurückgegriffen, die für alle elliptischen Copula-Funktionen und damit auch für die Gauß-Copula gilt. Die aus den Daten berechneten paarweisen Tau-Schätzer ( $\hat{\tau}$ ) können über den Zusammenhang in Formel 20 in die paarweisen Korrelationen der t-Copula-Korrelationsmatrix ( $\widehat{\rho}_{i,j}$ ) transformiert werden. Hierbei ist zu beachten, dass die entstehende Korrelationsmatrix durch die Transformation nicht in jedem Fall positiv semidefinit bleibt. Die Anzahl der Freiheitsgrade ( $\nu$ ) der t-Copula kann anschließend über die Maximum-Likelihood-Methode geschätzt werden.<sup>149</sup>

$$\widehat{\rho}_{i,j} = \sin \left( \frac{1}{2} \pi \hat{\tau} \right). \quad (20)$$

Formel 20: Zusammenhang zwischen Kendalls Tau und Korrelation der t-Copula

Auch für den Schätzer des Generatorparameters ( $\hat{\theta}$ ) von bivariaten archimedischen Copulas sind Beziehungen zum Schätzer von Kendalls Tau ( $\hat{\tau}$ ) aufgestellt worden. Für den bivariaten Fall der Gumbel-Copula kann der geschätzte Generatorparameter ( $\hat{\theta}$ ) direkt über Formel 21a berechnet werden:<sup>150</sup>

<sup>148</sup> Vgl. McNeil, A. et al., QRM, 2005, S. 229 f.; Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 323; Hlawatsch, S., Reichling, P., Copula, 2010, S. 11.

<sup>149</sup> Vgl. McNeil, A. et al., QRM, 2005, S. 230 f.; Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 323; Skoglund, J. et al., Hierarchical Copulas, 2013, S. 196.

<sup>150</sup> Vgl. McNeil, A. et al., QRM, 2005, S. 222, 230; Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 323 f.; Hlawatsch, S., Reichling, P., Copula, 2010, S. 11 f.



$$\hat{\tau} = 1 - \frac{1}{\hat{\theta}} \quad (21)$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{1 - \hat{\tau}} \text{ mit } \hat{\tau} \geq 0. \quad (21a)$$

Formel 21: Zusammenhang zwischen Kendalls Tau und Generatorparameter der bivariaten Gumbel-Copula

Analog existiert auch für die bivariate Clayton-Copula ein Zusammenhang zwischen Kendalls Tau ( $\hat{\tau}$ ) und dem Generatorparameter ( $\hat{\theta}$ ) (siehe Formel 22a):<sup>151</sup>

$$\hat{\tau} = \frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta} + 2} \quad (22)$$

$$\hat{\theta} = \frac{2\hat{\tau}}{1 - \hat{\tau}} \text{ mit } \hat{\tau} > 0. \quad (22a)$$

Formel 22: Zusammenhang zwischen Kendalls Tau und Generatorparameter der bivariaten Clayton-Copula

Bei archimedischen Copulas mit mehr als zwei Randverteilungen scheidet dieses Verfahren allerdings aus.<sup>152</sup> Als Alternative kann dann z. B. das Pseudo-Maximum-Likelihood-Verfahren, das zu den parametrischen Schätzverfahren gehört, verwendet werden. Im Kern geht es bei diesen Verfahren um die Maximierung der Wahrscheinlichkeit, dass die beobachteten Daten eine Realisation der geschätzten Verteilungsparameter darstellen. Da in den Daten keine Realisierungen der Copula, sondern nur Realisierungen der gemeinsamen Verteilung vorliegen, müssen Annahmen über die Randverteilungen getroffen werden. Es kann dabei auch die empirisch beobachtete Randverteilung verwendet werden. Da die Beobachtungen in diesem Fall in gleichverteilte Pseudorealisationen transformiert werden, spricht man vom Pseudo-Maximum-Likelihood-Verfahren oder Canonical-Maximum-Likelihood-Verfahren. Das Verfahren wird bei Verwendung parametrischer Randverteilungen Inference-for-Margins-Methode genannt. Insbesondere das Pseudo-Maximum-Likelihood-Verfahren hat sich gegenüber vergleichbaren Schätzern in empirischen Studien bewährt.<sup>153</sup>

---

<sup>151</sup> Vgl. McNeil, A. et al., QRM, 2005, S. 222; Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 324.

<sup>152</sup> S. dazu: McNeil, A. et al., QRM, 2005, S. 222; Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 323 f.

<sup>153</sup> Vgl. Cherubini, U. et al., Copula, 2004, S. 160 f.; McNeil, A. et al., QRM, 2005, S. 232 f.; Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 294 f., 324 f.; Hlawatsch, S., Reichling, P., Copula,

Auch bei der Parametrisierung der Copula-Funktionen sind die aufsichtlichen Vorgaben zur Sicherstellung der Stabilität der Abhängigkeit zu berücksichtigen. Analog zum Varianz-Kovarianz-Ansatz können insbesondere bei Verwendung der Rangkorrelationen Zeitfenster mit erhöhter Abhängigkeit durch Variation der Größe und Lage des Zeitfensters identifiziert werden. Diese lassen sich dann in die Korrelationsmatrix der Copula-Funktion transformieren.<sup>154</sup>

Bei Verwendung der parametrischen und parameterfreien Verfahren gestaltet sich die Umsetzung der Anforderung schwieriger. Beide Verfahren benötigen eine ausreichend große Stichprobe. Um Zeitfenster mit abweichender Abhängigkeit zu identifizieren, könnten die Daten der Stichprobe in kleinere Teilzeitreihen zerlegt werden. Allerdings wird hierdurch die Anzahl der Datenpunkte, die zur Spezifikation der einzelnen Copula-Funktionen genutzt werden können, verringert. Somit leidet die Schätzgenauigkeit der Verfahren. Eine Messung von Abhängigkeiten in sehr kleinen Zeitfenstern wird mangels Datenbasis regelmäßig nicht möglich sein.<sup>155</sup>

Bei allen vorgestellten Schätzverfahren erhöht sich der Aufwand mit steigender Anzahl an einzubeziehenden Risikoarten. Zudem werden im Vergleich zur eindimensionalen Statistik größere Stichproben für eine aussagekräftige Schätzung benötigt und die Varianz der Schätzer ist typischerweise höher.<sup>156</sup>

### 4.2.3 Vorzüge und Probleme der Copula-Modelle

Copula-Modelle können sehr flexibel an die vorhandenen Abhängigkeiten und Randverteilungen der Risikoarten angepasst werden. Auf diese Weise ist es möglich, dass die Randabhängigkeiten und die vollständige Abhängigkeitsstruktur berücksichtigt werden. Im Gegensatz zu den Varianz-Kovarianz-Ansätzen werden methodisch keine grundsätzlichen Annahmen zu den einbezogenen Verlustverteilungen der Einzelrisiken getroffen. Die Modellierung aller einbezogenen Risikoarten sollte jedoch hinreichend genau und zuverlässig sein. Mit der Wahl einer konkreten Copula-Funktion können dennoch sehr wohl konkrete Anforderungen verbunden sein. So müssen bspw. bei multivariaten archimedischen Copulas die Abhängigkeiten zwischen allen Risikopaaren identisch sein.

---

2010, S. 12; Weiß, G., Parameter Estimation, 2010, S. 21 f.; Fahrmeir, L. et al., Statistik, 2011, S. 377; für weitere mathematische Hintergründe siehe ebd.

<sup>154</sup> Vgl. Klein, A. et al., Risikoaggregation, 2014, S. 25.

<sup>155</sup> Vgl. Hlawatsch, S., Reichling, P., Copula, 2010, S. 9; Weiß, G., Parameter Estimation, 2010, S. 40.

<sup>156</sup> Vgl. Mai, J., Scherer, M., Abhängigkeiten, 2012, S. 8.

Insgesamt besitzen Copula-Modelle eine hohe modelltheoretische Validität und eignen sich dementsprechend gut zur Risikoaggregation. Zusätzlich liegt durch die Verwendung eines Copula-Modells die Gesamtverlustverteilung der Bank vor, die auch in anderen Fragestellungen verwendet werden kann.<sup>157</sup>

Der Einsatz eines Copula-Modells erfordert einen umfangreichen Parametrisierungsaufwand. Statt einzelner Risikokennzahlen werden ganze univariate Verteilungen als Eingangsparameter benötigt. Zudem ist sowohl die Auswahl einer Copula-Funktion als auch die Parameterschätzung herausfordernd. Dies ist besonders auf das Fehlen von verlässlichen Auswahl- bzw. Bestimmungstests zurückzuführen. Die Auswahl und Schätzung einer am besten geeigneten Copula ist damit nicht eindeutig möglich. In diesem Zusammenhang ist auch die Anforderung an eine nachvollziehbare Dokumentation nicht zu unterschätzen. Erschwerend kommt hinzu, dass die Schätzer über komplexe Verfahren berechnet werden und nicht immer robust sind. Zusätzlich können Copula-Funktionen und ihre Schätzer abstrakt und schwierig zu interpretieren sein.<sup>158</sup>

Durch die fehlende geschlossene Form einiger Copula-Funktion muss auf Simulationsverfahren zur Bestimmung des Gesamtrisikowertes zurückgegriffen werden. Hieraus resultieren nur näherungsweise und vergleichsweise intransparente Ergebnisse.<sup>159</sup>

Copula-Modelle gehören zu den fortgeschrittenen Methoden. Diese suggerieren regelmäßig eine höhere Genauigkeit der berechneten Ergebnisse. Nur bei einer angemessenen Ausgestaltung des Modells ist dieses Vertrauen gerechtfertigt.<sup>160</sup> Zusätzlich bestehen dieselben Probleme bezüglich einer stabilen und repräsentativen Abhängigkeitsstruktur wie bei den Varianz-Kovarianz-Ansätzen. So können sich gerade in Stressphasen die Abhängigkeiten zu Ungunsten des Instituts verändern.<sup>161</sup>

---

<sup>157</sup> Vgl. FMA, ÖNB, Quantitative Modelle, 2004, S. 41 f.; BCBS, Economic Capital, 2009, S. 29 f.; BCBS, Risk Aggregation, 2010, S. 82; Yoshida, T., Risk Aggregation, 2013, S. 24.

<sup>158</sup> Vgl. FMA, ÖNB, Quantitative Modelle, 2004, S. 42; Böcker, K., Hillebrand, M., Risk Aggregation, 2008, S. 18; BCBS, Economic Capital, 2009, S. 30; BCBS, Risk Aggregation, 2010, S. 82; Reuse, S., Diversifikationseffekte, 2016, S. 333.

<sup>159</sup> Vgl. Klein, A. et al., Risikoaggregation, 2014, S. 24.

<sup>160</sup> Vgl. BCBS, Economic Capital, 2009, S. 32.

<sup>161</sup> Vgl. BCBS, Risk Aggregation, 2010, S. 82.

Varianz-Kovarianz-Ansätze	Copula-Modelle
Einfache Implementierung	Wahl und Parametrisierung einer geeigneten Copula-Funktion herausfordernd
Aggregation kann ohne Simulationsverfahren erfolgen	Wenn geschlossene Form der Copula-Funktion fehlt, muss Simulationsverfahren zur Bestimmung des Risikomaßes genutzt werden
Geringer Parametrisierungsaufwand: Es werden nur Korrelationen der Risikofaktoren benötigt	Hoher Parametrisierungsaufwand: Neben der Abhängigkeitsstruktur werden univariate Verteilungen als Eingangsparameter benötigt
Schätzung der Korrelationen einfach durchführbar und nachvollziehbar	Komplexe Berechnungsverfahren sorgen dafür, dass Schätzer teilweise abstrakt und schwierig zu interpretieren sind
Anforderung an Eigenschaften der Verteilungen: Randverteilungen und Gesamtverteilung müssen gleichem elliptischen Verteilungstyp entsprechen	Keine Anforderungen an Eigenschaften der Verteilungen: Modell kann flexibel an vorhandene Abhängigkeiten und Randverteilungen angepasst werden
Es wird nur lineare Abhängigkeit erfasst	Beliebige Abhängigkeitsstruktur wird erfasst
Es werden aggregierte Risikokennzahlen berechnet	Gesamtverlustverteilung der Bank wird modelliert

Tabelle 1: Zusammenfassende Gegenüberstellung von Varianz-Kovarianz-Ansätzen und Copula-Modellen

## 5 Stresstestsimulationsstudie

Um durch den Einsatz von Aggregationsmodellen ökonomisches Kapital im Rahmen der Risikotragfähigkeitsberechnung einsparen zu können, müssen sich die Modelle allein schon im Eigeninteresse der Banken als zuverlässig und stabil erweisen. Eine Kapitaleinsparung darf zu keinem Zeitpunkt auf einer Unterschätzung des eigentlichen Risikos beruhen. Im empirischen Teil dieser Arbeit soll deshalb untersucht werden, ob die beiden vorgestellten Verfahren das Gesamtbankrisiko auch in Krisenzeiten zuverlässig schätzen. Hierzu werden sie einem Stresstest unterzogen. Stresstests werden regelmäßig genutzt, um das Verhalten eines Modells in Phasen unwahrscheinlicher oder kritischer Marktentwicklungen zu untersuchen. Hierdurch kann überprüft werden, ob das Modell auch außerhalb der normalen Marktsituationen verlässliche Ergebnisse liefert.<sup>162</sup> Das Verhalten beider Aggregationsmodelle wird daher in einem Marktumfeld, in dem Risiken verstärkt gleichzeitig eintreten, analysiert. Hierzu wird zwischen den Risikoarten eine positive Randabhängigkeit unterstellt. Diese Art der Abhängigkeit kann insbesondere in Krisenzeiten beobachtet werden.<sup>163</sup>

### 5.1 Literaturüberblick

In der wissenschaftlichen Literatur finden sich bereits andere empirische Studien zur Eignung von Top-down-Ansätzen zur Risikoaggregation in Banken. Diese untersuchen regelmäßig das Verhalten der Modelle unter normalen Marktbedingungen. Die ersten Studien legten den Fokus auf die Aggregationsverfahren als solche. So bestimmten *Kuritzkes et al.* das Gesamtrisiko analytisch über den Varianz-Kovarianz-Ansatz mit Hilfe der Annahme, dass die Einzelrisiken normalverteilt sind. Sie nutzten dabei Expertenschätzungen von großen Kreditinstituten für die Korrelationsmatrix und trafen keine expliziten Annahmen zu den Einzelrisikoverteilungen, sondern verwendeten die relativen Anteile der Risiken am Gesamtrisiko aus einer Befragung. Sie schätzten das erzielbare Einsparpotential bei Aggregation von Kredit-, Marktpreis- und operationellen Risiken im Vergleich zur einfachen Addition auf 15 %.<sup>164</sup> *Dimakos und Aas* hingegen benutzten ein Gauß-Copula-Modell, um Marktpreis-, Kredit- und operationelle Risiken zu aggregieren. Hierfür konnten sie echte Daten einer norwegischen Finanzgruppe benutzen. Für das operationelle Risiko griffen sie mangels ausreichender Daten

---

<sup>162</sup> Vgl. Walter, B., Stresstest, 2012, S. 8.

<sup>163</sup> Vgl. BCBS, Risk Aggregation, 2010, S. 76.

<sup>164</sup> Vgl. Kuritzkes, A. et al., Capital Adequacy, 2001, S. 22, 40.

auf eine Expertenschätzung zurück. Zudem wurden zur Vereinfachung das Marktpreis- und das operationelle Risiko in Abhängigkeit vom Kreditrisiko modelliert. Bei einem Konfidenzniveau von 99,97 % fiel das Gesamtrisiko um 20 % kleiner<sup>165</sup> als bei der einfachen Addition aus.<sup>166</sup> *Brockmann und Kalkbrenner* stellten das Aggregationsmodell der Deutschen Bank vor. Sie aggregierten fünf Risikoarten. In ihrem Artikel nutzten sie sowohl ein Gauß- als auch ein t-Copula-Modell und parametrische Randverteilungen. Die Korrelation zwischen Kredit- und Marktpreisrisiko wurde näherungsweise über Marktdaten geschätzt. Die Korrelation zum operationellen Risiko basierte auf einer Expertenschätzung. Bei einem Konfidenzniveau von 99,98 % kamen sie bei Nutzung eines Gauß-Copula-Modells im Vergleich zu einfachen Addition auf ein ca. 26 % niedrigeres Risikomaß. Bei Verwendung eines t-Copula-Modells fiel das Risiko ca. 23 % niedriger aus.<sup>167</sup>

In späteren Artikeln wurden umfangreichere Analysen vorgenommen. So wurden in der Studie von *Weiß* zeitkonstante und zeitabhängige Korrelationen im Varianz-Kovarianz-Ansatz und zeitabhängige Copula-Modelle zur Risikoaggregation genutzt. Er untersuchte im Rahmen einer Simulationsstudie, ob die Verwendung von Copula-Modellen zur Bestimmung eines Gesamt-VaR/ES generell vorteilhafter als die Nutzung von Varianz-Kovarianz-Ansätzen ist. Gleichzeitig testete er einen Copula-Anpassungstest und prüfte, ob sich Mixture-Copulas zur Risikoaggregation eignen. Als Datengrundlage verwendete er 1.275 bivariate gleichgewichtete Portfolios mit Schlusskursen aus 18 Werten des DAX, 24 Rohstoffwerten, 5 Aktienindizes und 4 Futures auf Wechselkursen im Zeitraum von 2001 bis 2008. Ausgehend von 1.000 Beobachtungen wurden der VaR bzw. ES für den nächsten Handelstag prognostiziert und im Rahmen eines Backtestings mit dem eingetretenen Verlust verglichen. Dieses Vorgehen wurde für jeden Tag des Schätzzeitraums (750 Handelstage) durchgeführt. Die generelle Vorteilhaftigkeit der Copula-Modelle konnte nicht bestätigt werden. Insbesondere bei Berechnung des ES wurden mit den Varianz-Kovarianz-Ansätzen bessere Ergebnisse erzielt. Der verwendete Copula-Anpassungstest erwies sich als nicht hinreichend präzise. Die Mixture-Copula war für die Anwendung im dynamischen Copula-GARCH-Modell nicht geeignet, da sie numerisch instabil war.<sup>168</sup>

---

<sup>165</sup> Die Einsparung bei einem Niveau von 99 % betrug 12 % und bei einem 95 % Niveau 11 %.

<sup>166</sup> Vgl. Dimakos, X., Aas, K., Risk modelling, 2004, S. 265 ff., 270, 272, 275 f.

<sup>167</sup> Vgl. Brockmann, M., Kalkbrenner, M., Aggregation, 2010, S. 45 ff.

<sup>168</sup> Vgl. Weiß, G., Copula-GARCH-Modelle, 2011, S. 543 f., 562, 565, 570 ff.

Umfangreiche Sensitivitätsanalysen finden sich in den Studien von *Rosenberg und Schuermann* und *Li et al.* In diesen wird der Einfluss von Parametervariationen auf das Risikomaß untersucht. *Rosenberg und Schuermann* nutzten eine Gauß-Copula zur Aggregation von Kredit-, Markt- und operationellen Risiken von international tätigen Großbanken. Die Ausgangsbasis ihrer Analyse basiert auf veröffentlichten regulatorischen Quartalsdaten von 17 in den Vereinigten Staaten tätigen Bankholdinggesellschaften im Zeitraum von 1994 bis 2002. Sie untersuchten die Sensitivität der Risikomaße bezüglich der Anteile der Risiken am Gesamtrisiko (Geschäftsmix), der Abhängigkeitsstruktur (Gauß- und t-Copula mit fünf und zehn Freiheitsgraden), des Risikomaßes (VaR und ES) und des Schätzverfahrens. Als Vergleichsbasis nutzten sie auch drei Varianz-Kovarianz-Ansätze (den ‚klassischen‘ Ansatz aus Formel 15, die einfache Addition und den Ansatz mit der Annahme einer multivariaten Normalverteilung aus Fußnote 107). Für die Korrelationen übernahmen sie dabei Durchschnittswerte aus anderen Studien. Sie kamen u. a. zu den Ergebnissen, dass die einfache Addition die Risiken um mehr als 40 % überschätzt, während die Annahme der multivariaten Normalverteilung das Gesamtrisiko in einer ähnlichen Größenordnung unterschätzt. Die Risikowerte aus den Sensitivitätsexperimenten bei Verwendung des ‚klassischen‘ Varianz-Kovarianz-Ansatzes ähnelten stark denen bei Verwendung der Gauß-Copula, waren jedoch betragsmäßig höher.<sup>169</sup>

*Li et al.* aggregierten in ihrer empirischen Studie ebenfalls Kredit-, Markt- und operationelle Risiken mit Hilfe von Copula-Modellen (Gauß- und t-Copula sowie eine Mixture-Copula aus t- und Gumbel-Copula) und Varianz-Kovarianz-Ansätzen (einfache Addition und ‚klassischer‘ Ansatz). Hierbei wurde insbesondere der Einfluss der Randabhängigkeiten auf den aggregierten Risikowert untersucht. Als Ausgangsdatenbasis verwendeten sie in der Literatur etablierte parametrische Verlustverteilungen. Für die Parametrisierung dieser Verteilungen wurden die Lageparameter aus einer anderen Studie, die auf Daten des Meldewesens österreichischer Banken basiert, zugrunde gelegt. Die verwendeten Korrelationen stammten ebenfalls aus einer anderen Studie. Als Risikomaß wurde nur der VaR genutzt. Im Ergebnis wurde festgehalten, dass die einfache Addition die größten Risikowerte lieferte und der Varianz-Kovarianz-Ansatz die geringsten. Letzteres sei u. a. auf die mangelhafte Berücksichtigung der Randabhängigkeiten zurück zu führen. Mit steigender Randabhängigkeit der Copulas stiegen die

---

<sup>169</sup> Vgl. Rosenberg, J., Schuermann, T., *Integrated Risk Management*, 2006, S. 569 ff., 581, 594, 612.

Risikowerte (keine Randabhängigkeit: Gauß-Copula; bis positive Randabhängigkeit: Mixture-Copula). Bei einem 99,9 % Konfidenzniveau war das Gesamtrisiko aus dem Varianz-Kovarianz-Ansatz im Vergleich zu einfachen Addition ca. 12 % niedriger. Bei Verwendung des Gauß-Copula-Modells war das Risikomaß ca. 10 %, beim t-Copula-Modell mit zehn Freiheitsgraden ca. 7 %, beim t-Copula-Modell mit einem Freiheitsgrad ca. 3 % und beim Mixture-Copula-Modell ca. 1 % kleiner.<sup>170</sup>

In allen vorgestellten Studien wurden die aufsichtlichen Anforderungen an die Risikoaggregation bzw. an den Ansatz von Diversifikationseffekten nicht berücksichtigt. Insbesondere bei der Entscheidung, ein komplexeres Aggregationsmodell einzusetzen, sollte die Konservativitätsanforderung beachtet werden. Für einen umfassenden Vergleich werden die Modelle in dieser Studie daher sowohl anhand der Gesamtzeitreihe als auch anhand von Zeitpunkten extremer Abhängigkeit parametrisiert.

## 5.2 Untersuchungsdesign

Im Rahmen dieser Arbeit werden Adressenausfall-, Marktpreis- sowie operationelle Risiken aggregiert. Diese Risiken stellen regelmäßig die größten Risikotreiber dar und werden nahezu von allen Kreditinstituten in das Risikotragfähigkeitskonzept einbezogen.<sup>171</sup> Als Risikomaß wird der weit verbreitete Value-at-Risk verwendet.<sup>172</sup> Zur Sicherstellung der Robustheit der Ergebnisse wird analog zu *Rosenberg und Schuermann* auch der Expected Shortfall herangezogen.<sup>173</sup>

Die Ausgangsdatenbasis bilden simulierte Zeitreihen der jährlichen relativen Verluste. Die relativen Verluste beziehen sich dabei auf das Risiko-Exposure der jeweiligen Risikoart. Negative Verluste stellen dabei Gewinne dar, die durch die einzelne Risikoart verursacht wurden. Copulas lassen sich neben der Risikoaggregation auch zur Simulation abhängiger Daten verwenden. Hierzu sind jedoch Annahmen zu den Randverteilungen zu treffen, da die aus der Copula simulierten Daten über die Quantilfunktionen der Randverteilungen in die simulierten

---

<sup>170</sup> Vgl. Li, J. et al., *Aggregation*, 2015, S. 161 ff., 175, 183.

<sup>171</sup> Vgl. Deutsche Bundesbank, *Range of Practice*, 2010, S. 13, 15; Deutsche Bundesbank, *Monatsbericht RTF*, 2013, S. 35.

<sup>172</sup> Vgl. Broll, U., Förster, A., *VaR*, 2017, S. 101.

<sup>173</sup> Vgl. Rosenberg, J., Schuermann, T., *Integrated Risk Management*, 2006, S. 605.



Zeitreihen mit den gewünschten Eigenschaften transformiert werden.<sup>174</sup> Durch die Verwendung einer Gumbel-Copula besitzt die gemeinsame Verteilung der simulierten Zeitreihen eine positive Randabhängigkeit, die für das hier verwendete Stresstestszenario benötigt wird.<sup>175</sup> Für die Randverteilungen werden klassische Modellierungen der verwendeten Risikoarten genutzt, die im nachfolgenden Kapitel 5.4 einzeln vorgestellt werden.

Die Risiken aus der so erstellten Ausgangszeitreihe sollen über Varianz-Kovarianz-Ansätze (einfache Addition und Verwendung der Korrelationen aus den simulierten Zeitreihen) und Copula-Modelle (Gauß- und t-Copula)<sup>176</sup> aggregiert werden. Da die Korrelation bzw. Abhängigkeitsstruktur im simulierten Datensatz konstant ist, werden zur Vermeidung von Verzerrungen in den Ergebnissen konstante Abhängigkeitsmodelle genutzt. Analog zu *Rosenberg und Schuermann* werden nur die empirischen Randverteilungen für die Einzelrisiken im Rahmen der Aggregation verwendet,<sup>177</sup> um Verzerrung aus der Modellierung der Einzelrisiken auszuschließen.<sup>178</sup>

Im Gegensatz zu den Studien von *Rosenberg und Schuermann* oder *Li et al.*, die die Korrelationen aus anderen Quellen nutzten,<sup>179</sup> wird im Rahmen dieser Arbeit die Korrelation anhand der Ausgangszeitreihen geschätzt (siehe Formel 2, 3 und 5). Dabei werden die Korrelationen der Gesamtzeitreihe und die maximal beobachtbare Korrelation der Zeitreihe in einem rollierenden Zeitfenster von 12 Monaten für die Berechnung in zwei unterschiedlichen Varianz-Kovarianz-Ansätzen verwendet.

Als Ausgangs-Konfidenzniveau für den VaR wird in Anlehnung an den Leitfaden zur Beurteilung bankinterner Risikotragfähigkeitskonzepte das 99,9 % Niveau genutzt.<sup>180</sup> Der Expected Shortfall wurde erstmals im Rahmen der Reform von

---

<sup>174</sup> Vgl. Großmann, S., *Stresstests*, 2006, S. 92. Auch Li et al. generieren die Ausgangszeitreihen in ihrer Studie über parametrische Randverteilungen (Vgl. Li, J. et al., *Aggregation*, 2015, S. 175 f.).

<sup>175</sup> Zur Wahl des Generatorparameters siehe Kapitel 5.3.

<sup>176</sup> Die archimedischen Copulas sind für die Einbeziehung von mehr als zwei Risiken ungeeignet (siehe Kapitel 4.2.1) und auch in der Praxis kommen nur diese beiden Vertreter der Copula-Modelle zum Einsatz. Vgl. Deutsche Bundesbank, *Range of Practice*, 2010, S. 23.

<sup>177</sup> Vgl. Rosenberg, J., Schuermann, T., *Integrated Risk Management*, 2006, S. 592.

<sup>178</sup> Im Rahmen der Berechnungen in R wurden auch die parametrischen Randverteilungen verwendet. Die aggregierten Gesamtbank-Risikomaße bei Verwendung dieser waren durchweg größer als die Risikomaße bei Verwendung der empirischen Randverteilungen.

<sup>179</sup> Vgl. Rosenberg, J., Schuermann, T., *Integrated Risk Management*, 2006, S. 594; Li, J. et al., *Aggregation*, 2015, S. 176 f.

<sup>180</sup> Vgl. Hull, J., *Risikomanagement*, 2016, S. 384; BaFin, *Leitfaden*, 2018, Tz. 61.

Basel III im Dezember 2017 vom Baseler Bankenausschuss für die Bestimmung der Eigenmittelanforderung des Handelsbuchs bei Verwendung interner Modelle eingeführt. Hierbei wird die Verwendung des 97,5 % Niveaus vorgegeben. Im Rahmen der Untersuchung stellte sich jedoch heraus, dass sich die Ergebnisse bei Verwendung des Expected Shortfalls mit einem Konfidenzniveau von 97,5 % abgesehen von der relativen Höhe nicht von den Ergebnissen des Value-at-Risk zum 99,9 % Niveau unterscheiden. Deshalb wird im Rahmen dieser Arbeit für den Expected Shortfall ebenfalls das 99,9 % Niveau genutzt. Dies hat zudem den Vorteil, dass der Expected Shortfall, der in seiner Definition auf den Value-at-Risk zurückgreift, zum selben Konfidenzniveau berechnet wird.<sup>181</sup> Diese Konfidenzniveaus wurden zudem auch in der Studie von *Rosenberg und Schuermann* genutzt.<sup>182</sup>

Für die Varianz-Kovarianz-Ansätze werden die Einzelrisikomaße als Eingangsparameter benötigt. Diese können direkt aus den Ausgangszeitreihen der jährlichen Einzelrisikoverluste bestimmt werden (Bestimmung anhand der sortierten simulierten Ausgangsdaten; auch Monte-Carlo-Simulation genannt).<sup>183</sup> Dabei wird bereits der Anteil des jeweiligen Risiko-Exposures am Gesamtbankrisiko berücksichtigt.<sup>184</sup> Das Zwischenergebnis dieses Teilschrittes ergibt den jährlichen Verlust aus dem einzelnen Risikotreiber bezogen auf das Gesamtrisiko-Exposure, der zum jeweiligen Konfidenzniveau nicht überschritten wird (VaR) bzw. der den Erwartungswert unter der Bedingung darstellt, dass das gewählte Konfidenzniveau überschritten wird (ES). Im Rahmen der einfachen Addition werden die so bestimmten Risikomaße pro Risikoart über Formel 16 zum Gesamtbank-Risikomaß addiert. In den anderen Varianz-Kovarianz-Ansätzen wird zusätzlich die vorher quantifizierte lineare Korrelation berücksichtigt (Korrelation der Gesamtzeitreihe und maximale Korrelation aus Zeitfenster; siehe Formel 15).

Zur Anpassung der Copula-Funktionen an die Zeitreihen werden die simulierten Beobachtungen in einem ersten Schritt in Pseudo-Beobachtungen umgewandelt. Hierbei wird der jeweilige Rang der Beobachtung durch die um eins erhöhte Anzahl der Werte geteilt. Wie in der Studie von *Weiß* wird das Pseudo-Maximum-Likelihood-Verfahren zur Schätzung der Copula-Parameter verwendet.<sup>185</sup> Zusätzlich werden die Copula-Funktionen in einem zweiten Modell über

---

<sup>181</sup> Vgl. BCBS, Marktrisiko, 2016, S. 52; BCBS, Basel III, 2017, S. 67.

<sup>182</sup> Vgl. Rosenberg, J., Schuermann, T., *Integrated Risk Management*, 2006, S. 596.

<sup>183</sup> Vgl. Cottin, C., Döhler, S., *Risikoanalyse*, 2009, S. 376.

<sup>184</sup> Vgl. Rosenberg, J., Schuermann, T., *Integrated Risk Management*, 2006, S. 581, 605.

<sup>185</sup> Vgl. Weiß, G., *Copula-GARCH-Modelle*, 2011, S. 558.

die größten in Zeitfenstern beobachtbaren Rangkorrelationsschätzer parametrisiert, um die aufsichtlichen Anforderung an die Konservativität zu erfüllen. Für die Gauß-Copula werden dabei die Spearmans Rangkorrelationen über den Zusammenhang in Formel 19 in die Korrelationen der Gauß-Copula-Korrelationsmatrix transformiert.<sup>186</sup> Die t-Copula wird mit Hilfe von Kendalls Tau und der Beziehung zur Korrelation der t-Copula aus Formel 20 parametrisiert. Der Freiheitsgrad der t-Copula wird bei Umsetzung im Statistikprogramm R<sup>187</sup> über ein Maximum-Likelihood-Verfahren geschätzt. Hierbei kann es zu Problemen kommen, wenn sich die Korrelationskoeffizienten 1 annähern.<sup>188</sup> Gerade bei Verwendung der transformierten konservativen Rangkorrelationsschätzer ist dies in einigen Durchläufen der Fall. Sofern eine Parametrisierung bei Verwendung der berechneten Korrelationen mit Hilfe des Schätz-Algorithmus nicht möglich war, wurden die verwendeten Korrelationsschätzer auf 0,985 begrenzt.

Nachdem die Copula-Funktionen geschätzt wurden, müssen die Risikomaße über eine Monte-Carlo-Simulation generiert werden. Hierfür werden aus der Copula-Funktion 10.000 Zufallszahlen generiert. Diese werden über die empirischen Randverteilungen, die anhand der Ausgangszeitreihen geschätzt wurden, in die jeweiligen relativen Verluste transformiert.<sup>189</sup>

Als Zwischenergebnis resultieren hieraus die jährlichen relativen Verluste der Risikoarten. Bei Multiplikation der jeweiligen Verluste mit dem Anteil des Teilrisiko-Exposures am Gesamtrisiko-Exposure und anschließender Addition entsteht der jährliche relative Gesamtbankportfolioverlust (siehe auch Formel 17). Die Risikomaße des Gesamtbankportfolios können dann analog zur Bestimmung der Risikomaße für die einzelnen Risikoarten über die nach Größe sortierten Verluste quantifiziert werden.<sup>190</sup>

Zufallszahlen werden in statistischen Programmen über einen Algorithmus berechnet und stellen somit genauer gesagt nur Pseudozufallszahlen dar.<sup>191</sup> Um zu verhindern, dass ein ungünstiger Startpunkt im Algorithmus die Ergebnisse verzerrt, werden die Berechnungen 100-mal durchgeführt und der Mittelwert der

---

<sup>186</sup> Auf den näherungsweisen Ansatz der Spearmans Korrelationen ohne Transformation wird verzichtet.

<sup>187</sup> Version 3.2.5, Paket: Copula

<sup>188</sup> Vgl. Yan, J., Package copula, 2007, S. 13.

<sup>189</sup> Vgl. Li, J. et al., Aggregation, 2015, S. 169 f.

<sup>190</sup> Vgl. Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 376.

<sup>191</sup> Vgl. Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 337.

Risikomaße berechnet. Während *Rosenberg und Schuermann* die Normal-Copula als Vergleichsmaßstab verwendeten,<sup>192</sup> können im Rahmen dieser Studie die Risikomaße aus der ursprünglichen Ausgangszeitreihe als Benchmark genutzt werden.

### 5.3 Auswahl des Stresstestszenarios

Über den Generatorparameter der Gumbel-Copula kann die Stärke des Stress-testszenarios maßgeblich beeinflusst werden. Je größer der Parameter gewählt wird, desto stärker sind die Abhängigkeiten zwischen den Risikoarten und umso größer wird das Risikomaß der Ausgangszeitreihe.

Um eine plausible Abhängigkeitsstruktur zu verwenden, wurde der Generatorparameter über die in der Vergangenheit beobachtbare maximale Abhängigkeit bestimmt. Dazu wurde der Datensatz aus der Untersuchung von *Reuse* verwendet.<sup>193</sup> In diesem Datensatz, der den Zeitraum von 2000 bis 2016 umfasst, konnte über Kendals Tau und den Zusammenhang aus Formel 21a das Theta der Gumbel-Copula geschätzt werden. Es wurde die Abhängigkeitsstruktur zwischen dem Rentenperformanceindex (RexP), dem Deutschen Aktien Index (DAX) und dem Bank of America Merrill Lynch Corporate Index (BofA ML Corporate) untersucht. Die Rangkorrelationen der logarithmierten Renditen zwischen jeweils zwei Indizes wurden dabei rollierend auf Jahresbasis bestimmt. Das größte berechnete Theta wurde zwischen RexP und BofA ML Corporate mit 1,92 beobachtet. Dieser Wert wird daher als Generatorparameter der Gumbel-Copula genutzt.

Um die Stärke des Stressszenarios einschätzen zu können, kann das Konturdiagramm der kumulierten Verteilungsfunktion der Gumbel-Copula (mittleres Diagramm in nachfolgender Abbildung) mit den Konturdiagrammen einer Unabhängigkeits-Copula (linkes Diagramm) und einer Komonotonie-Copula (rechtes Diagramm) verglichen werden (siehe Abbildung 6):

---

<sup>192</sup> Vgl. Rosenberg, J., Schuermann, T., *Integrated Risk Management*, 2006, S. 593.

<sup>193</sup> An dieser Stelle sprechen wir Herrn Dr. Reuse unseren Dank für die zur Verfügungstellung der Zeitreihen aus. Für weitere Informationen zur Zeitreihe verweisen wir auf: Reuse, *Diversifikationseffekte*, 2016, S. 318 ff.

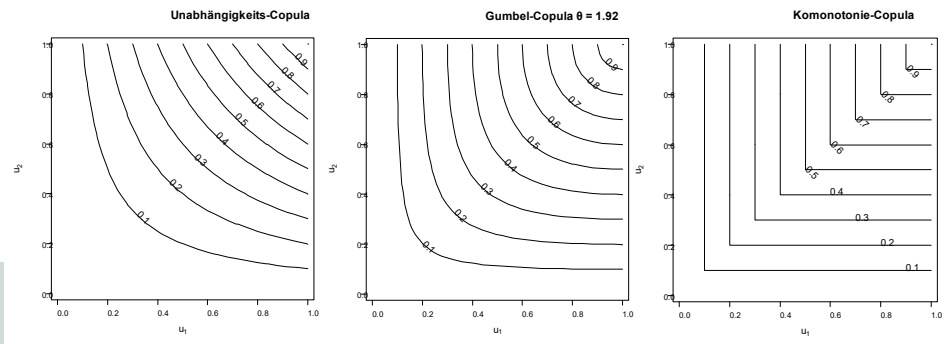


Abbildung 6: Konturdiagramme der kumulierten Verteilungsfunktionen

Während die Gumbel-Copula mit dem Generatorparameter 1 die vollständige Unabhängigkeit zwischen den beiden Zufallsvariablen unterstellt (Unabhängigkeits-Copula), ist bei der Gumbel-Copula mit dem Parameter 1,92 eine deutliche Annäherung der Abhängigkeitsstruktur an eine Komonotonie-Copula mit perfekter positiver Abhängigkeit (obere Fréchet-Hoeffding-Schranke aus Formel 7) zu erkennen.

## 5.4 Verwendete Verteilungsfunktionen der Risikoarten

In dieser Studie stehen die Konzepte zur Risikoaggregation im Vordergrund. Um weitere Spezifikationsfehler auszuschließen, werden in der hier durchgeführten Stresstestbetrachtung idealtypische Verteilungsfunktionen für die drei Risikoarten Adressenausfall-, Marktpreis- und operationelle Risiken verwendet. Diese werden nachfolgend kurz dargestellt.

### 5.4.1 Adressenausfallrisiko

Unter dem Adressenausfallrisiko im engeren Sinne wird nur der Ausfall eines Kreditnehmers verstanden. Verluste aus der Verschlechterung der Bonität (Bonitätsrisiko) bilden zusammen mit dem Adressenausfallrisiko das Kreditrisiko.<sup>194</sup> Bei dem hier unterstellten Kreditportfolio im Mengengeschäft mit Privatkunden wird das Bonitätsrisiko vernachlässigt, da in der Regel keine regelmäßige Boni-

<sup>194</sup> Vgl. Bartetzky, P., Gesamtbanksteuerung, 2012, S. 41 f.

tätseinstufung dieser Kreditpositionen erfolgt. Für die Modellierung des Adressenausfallrisikos in dieser Arbeit wird daher die Vasicek-Verteilung genutzt.<sup>195</sup> Das Vasicek-Modell liegt den internen Modellen zur Bestimmung der aufsichtlichen Mindestkapitalanforderung für das Kreditrisiko nach Säule I (sogenannte IRB-Ansätze) zu Grunde. Da dieses Modell eine Gauß-Copula zur Modellierung der Korrelationsstruktur zwischen den Zeitpunkten der Kreditausfälle nutzt, wird es auch als einfaktorielles Gauß-Copula-Modell bezeichnet. Das Modell berücksichtigt keine Verluste aus Rating-Herabstufungen (Bonitätsrisiko). Die ungünstigste Ausfallrate (Worst Case Default Rate; kurz: *WCDR*) für den Zeithorizont  $T$  und das Konfidenzniveau  $\alpha$  lässt sich in Abhängigkeit der Ausfallkorrelation ( $ac$ ) und der Ausfallwahrscheinlichkeit bis zum Zeitpunkt  $T$  ( $PD$ ) über Formel 23 berechnen:<sup>196</sup>

$$WCDR(T, \alpha) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD) + \sqrt{ac}\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1 - ac}}\right). \quad (23)$$

Formel 23: Ungünstigste Ausfallrate aus dem Vasicek-Modell

Aus Vereinfachungsgründen wird ein Kreditportfolio aus ähnlichen Krediten im Mengengeschäft (z. B. Ratenkredite) unterstellt, in dem jeder einzelne Kredit nur einen geringen Anteil am Gesamtportfolio hat und die Ausfallwahrscheinlichkeiten und Korrelationen zwischen zwei beliebigen Krediten identisch sind. Durch die Multiplikation von der berechneten ungünstigsten Ausfallrate (Formel 23), mit der Kredithöhe bei Ausfall (kurz: *EaD*) und der Verlustrate bei Ausfall (kurz: *LGD*) lässt sich der Portfolioverlust aus dem Adressenausfallrisiko ( $PL_A$ ) zum Konfidenzniveau  $\alpha$  über Formel 24 berechnen:<sup>197</sup>

$$PL_A = WCDR(T, \alpha) \cdot EaD \cdot LGD. \quad (24)$$

Formel 24: Portfolioverlust aus dem Adressenausfallrisiko

Im IRB-Ansatz wird die Formel zur Berechnung der Ausfallkorrelation je nach Risikopositionsklasse in Abhängigkeit von der Ausfallwahrscheinlichkeit vorgegeben. Für eine angenommene Ausfallwahrscheinlichkeit der einzelnen Kredite

<sup>195</sup> Brockmann und Kalkbrenner (Aggregation, 2010) stellten das Aggregationsmodell der Deutschen Bank dar, das für die Verlustverteilungsfunktion des Kreditrisikos ebenfalls die Vasicek-Verteilung verwendet.

<sup>196</sup> Vgl. Hull, J., Risikomanagement, 2016, S. 283 ff., 384, 503, 507.

<sup>197</sup> Vgl. Hull, J., Risikomanagement, 2016, S. 286, 384, 503.

von 2 % p.a. in der Positionsklasse Mengengeschäft beträgt die vorgegebene Ausfallkorrelation gerundet 0,1.<sup>198</sup>

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der jährlichen Portfolioausfallrate mit einer Einzelkredit-Ausfallwahrscheinlichkeit von 2 % p.a. und einer Ausfallkorrelation zwischen den Krediten von 0,1 ist im Diagramm in Abbildung 7 dargestellt. Aus Vereinfachungsgründen wird von unbesicherten Krediten ausgegangen, die in voller Höhe ausfallen (EaD und LGD = 100 %):<sup>199</sup>

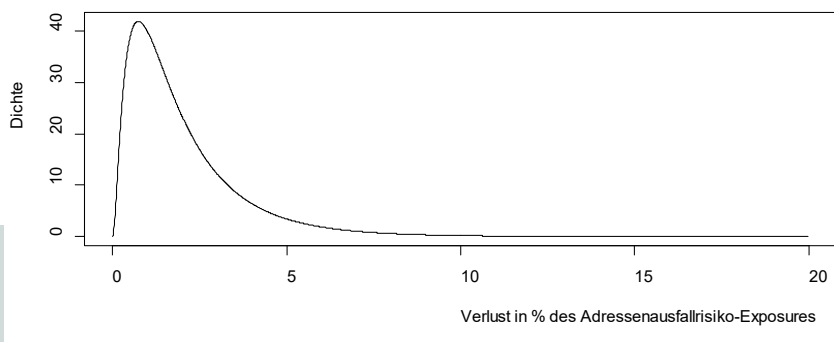


Abbildung 7: Wahrscheinlichkeitsdichte des Adressenausfallrisikos

## 5.4.2 Marktpreisrisiko

Das Marktpreisrisiko entsteht aus ungünstigen Veränderung von Marktfaktoren wie Aktienkursen, Zinsen oder Wechselkursen, die sich negativ auf den (Bar-) Wert der vom Institut gehaltenen bilanziellen und außerbilanziellen Positionen auswirken.<sup>200</sup> Die Verlustverteilung des Marktpreisrisikos ist typischerweise symmetrisch, da neben Verlusten auch Gewinne (Kurssteigerungen) eintreten können. Für eine einfachere Risikoaggregation werden positive Renditen als Verluste und negative Renditen als Gewinne (negative Verluste) aufgefasst.<sup>201</sup> Im Gegensatz zur Normalverteilung weist die Verlustverteilung des Marktpreisrisikos höhere Wahrscheinlichkeiten in den Rändern auf. Für eine Approximation eignet sich daher die t-Verteilung.<sup>202</sup> Durch die Wahl der Freiheitsgrade ( $\nu$ ) des

<sup>198</sup> Vgl. Art. 154 Abs. 1 alt. ii CRR.

<sup>199</sup> Vgl. Hull, J., Risikomanagement, 2016, S. 388, 503.

<sup>200</sup> Vgl. Auerbach, D., Bankenaufsicht, 2015, S. 87.

<sup>201</sup> Bei den beiden anderen Risikoarten werden nur Verluste modelliert, die als positive Zahlen dargestellt werden.

<sup>202</sup> Vgl. Wolfgring, A., Risikomanagement, 2008, S. 12; Bartetzky, P., Gesamtbanksteuerung, 2012, S. 38; Hull, J., Risikomanagement, 2016, S. 614.

Lageparameters ( $\mu$ ) und des Skalierungsparameters ( $s$ ) kann die t-Verteilung angepasst werden. Die Dichtefunktion hat dann folgende Form (siehe Formel 25):<sup>203</sup>

$$f(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{s\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\frac{\nu + \left(\frac{z-\mu}{s}\right)^2}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \quad (25)$$

Formel 25: Dichtefunktion des Marktpreisrisikos

Bei Verwendung der Parameter für die t-Verteilung aus einer Vorversion der Studie von *Rosenberg und Schuermann*<sup>204</sup> hat die Wahrscheinlichkeitsdichte der jährlichen relativen Verluste aus dem Marktpreisrisiko mit 11 Freiheitsgraden, einem erwarteten Verlust ( $\mu$ ) von  $-0,29\%$  und einem Skalierungsparameter ( $s$ ) von  $10\%$  folgende Form (siehe Abbildung 8):<sup>205</sup>

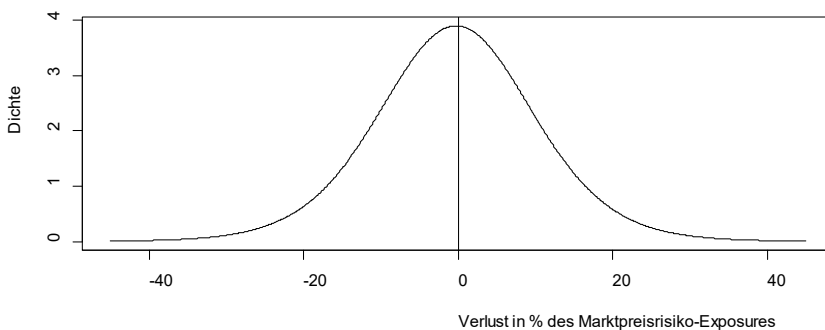


Abbildung 8: Wahrscheinlichkeitsdichte des Marktpreisrisikos

### 5.4.3 Operationelle Risiko

In Anlehnung an die Definition aus Art. 4 Abs. 1 Nr. 52 CRR entstehen Verluste durch operationelle Risiken aus unangemessenen internen Prozessen, dem Versagen von Verfahren, Menschen und Systemen oder in Folge externer Ereignisse

<sup>203</sup> MathWorks, Inc., Dokumentation, 2017, o. S.

<sup>204</sup> In der später im Journal of Financial Economics veröffentlichten Version des Artikels wurden empirische statt parametrische Randverteilungen genutzt. Die tägliche Standardabweichung wurde mit der Wurzel-t-Formel auf Jahresbasis skaliert und auf  $10\%$  aufgerundet (exakter Wert  $9,96\%$ ).

<sup>205</sup> Vgl. Rosenberg, J., Schuermann, T., Integrated Risk Management, 2004, S. 25.



(z. B. Naturkatastrophen). Die Modellierung ist insbesondere aufgrund der Seltenheit von Großschäden und der damit mangelnden Datenlage erschwert.<sup>206</sup> Typischerweise erfolgt die Schätzung der potentiellen Verluste über zwei Verteilungen. Für die Schadenshäufigkeit wird die Poisson-Verteilung herangezogen, während für die Schadenshöhe pro Schadensfall eine logarithmierte Normalverteilung genutzt wird.<sup>207</sup> Aas, Dimakos und Øksendahl haben auf Basis von Simulationen festgestellt, dass die Gesamtverlustverteilung für die operationellen Risiken durch eine einzige logarithmische Normalverteilung angenähert werden kann.<sup>208</sup> Dieses Vorgehen findet sich auch in weiteren vergleichbaren Studien und wird daher aus Vereinfachungsgründen auch in dieser Arbeit übernommen.<sup>209</sup>

Die Dichtefunktion der logarithmischen Normalverteilung ist nur für positive  $z$ -Werte definiert und ist in Formel 26 dargestellt. Sie lässt sich über den Erwartungswert und die Varianz der Schadenshöhe ( $E(PL_O)$  bzw.  $Var(PL_O)$ ) mit Hilfe von Formel 26a und 26b parametrisieren.<sup>210</sup>

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma z} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln(z)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (26)$$

$$\text{Mit } \mu = \ln(E(PL_O)) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{Var(PL_O)}{E(PL_O)^2}\right) \quad (26a)$$

$$\text{Und } \sigma^2 = \ln\left(1 + \frac{Var(PL_O)}{E(PL_O)^2}\right). \quad (26b)$$

Formel 26: Dichtefunktion des operationellen Risikos

Bei Annahme einer prozentualen erwarteten Schadenshöhe von 1 % und einer Schadensstandardabweichung von 0,1 % pro Jahr ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsdichte für den jährlichen relativen Verlust des operationellen Risikos (siehe Abbildung 9):

---

<sup>206</sup> Vgl. Wolfgring, A., Risikomanagement, 2008, S. 16; Bartetzky, P., Gesamtbanksteuerung, 2012, S. 70; Auerbach, D., Bankenaufsicht, 2015, S. 85; Hull, J., Risikomanagement, 2016, S. 538.

<sup>207</sup> Vgl. Hull, J., Risikomanagement, 2016, S. 542.

<sup>208</sup> Vgl. Aas et al., Aggregation, 2005, S. 20.

<sup>209</sup> Siehe bspw.: Li, J. et al., Aggregation, 2015, S. 166 f.

<sup>210</sup> Vgl. Cottin, C., Döhler, S., Risikoanalyse, 2009, S. 39; Li, J. et al., Aggregation, 2015, S. 167.

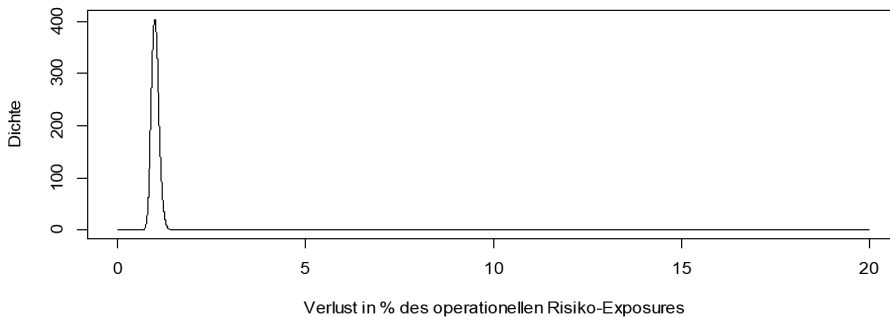


Abbildung 9: Wahrscheinlichkeitsdichte des operationellen Risikos

## 5.5 Darstellung der Ergebnisse

Bei Verwendung der in Kapitel 5.4 dargestellten Parameter für die drei Einzelrisiken ergeben sich die in Tabelle 2 dargestellten aggregierte Risikomaße. Die Ergebnisse basieren auf 100 Simulationen mit jeweils 10.000 Datenpunkten in der Statistiksoftware R. Bei 36 Durchläufen musste zur Anpassung des konservativen t-Copula-Modells eine Begrenzung von insgesamt 108 transformierten Rangkorrelationen auf 0,985 durchgeführt werden. Für die Berechnung wurde unterstellt, dass das Adressenausfallrisiko-Exposure einen Anteil von 30 %, das Marktpreisrisiko-Exposure einen Anteil von 3 % und dass das Exposure des operationellen Risikos einen Anteil von 67 % am Gesamtrisiko-Exposure hat.<sup>211</sup> Der hohe Anteil des operationellen Risikos ist der Annahme geschuldet, dass das vollständige Adressenausfallrisiko- und Marktpreisrisiko-Exposure zusätzlich dem operationellen Risiko ausgesetzt ist. Es ist anzumerken, dass es sich nur um die Anteile am Gesamtrisiko-Exposure handelt. Die Anteile der Risikoarten am berechneten Gesamtbankrisiko können sich hiervon unterscheiden, da hierbei neben der Exposure-Höhe auch der Risikogehalt der Positionen berücksichtigt wird.<sup>212</sup>

<sup>211</sup> Die Anteile wurden in Anlehnung an Rosenberg und Schuermann festgelegt. Vgl. Rosenberg, J., Schuermann, T., *Integrated Risk Management*, 2006, S. 582.

<sup>212</sup> Vgl. Rosenberg, J., Schuermann, T., *Integrated Risk Management*, 2006, S. 581 f.

Methode (Risikomaße in % des Gesamtrisiko-Exposures)	99,9 % VaR		99,9 % ES	
	Risikomaß	Abweichung	Risikomaß	Abweichung
Risikomaß der Ausgangszeitreihe	5,796 %	-/-	6,591 %	-/-
VKA (Gesamtzeitreihen-Korrelation)	5,397 %	-6,88 %	6,139 %	-6,86 %
Gauß-Copula	5,394 %	-6,94 %	6,008 %	-8,85 %
t-Copula	5,494 %	-5,21 %	6,151 %	-6,68 %
VKA (Einfache Addition)	5,915 %	2,04 %	6,712 %	1,83 %
VKA (Konservative Korrelation)	5,881 %	1,46 %	6,674 %	1,26 %
Gauß-Copula (konservativ)	5,820 %	0,42 %	6,488 %	-1,57 %
t-Copula (konservativ)	5,883 %	1,50 %	6,522 %	-1,06 %

Tabelle 2: Aggregierte Risikomaße (Zeithorizont 1 Jahr) und relative Abweichung der Schätzer gegenüber Risikomaß der Ausgangszeitreihe

Der jährliche Verlust der Ausgangszeitreihe, der bei einem Betrachtungshorizont von einem Jahr mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,9 % nicht überschritten wird (VaR zum Konfidenzniveau von 99,9 % bei einer Haltedauer von einem Jahr), beträgt in diesem Stresstestszenario 5,796 % des Gesamtrisiko-Exposures. Dieses Risikomaß stellt die Benchmark für die anderen Verfahren dar. Für einen neutralen Vergleich können nur die Aggregationsmodelle direkt miteinander verglichen werden, die entweder an der Gesamtzeitreihe (Gruppe 1) oder an den maximal beobachteten Korrelationen (Gruppe 2; Kennzeichnung: konservativ) spezifiziert wurden.<sup>213</sup> Die einfache Addition der Einzelrisikomaße als Spezialfall des Varianz-Kovarianz-Ansatzes (kurz: VKA) zählt dabei aufgrund der unterstellten Korrelationen von 1 zur Gruppe der konservativen Modelle. Zur Darstellung der Abweichungen wurde die Differenz zwischen Risikomaßschätzer und Risikomaß der Ausgangszeitreihe ins Verhältnis zum Risikomaß der Ausgangszeitreihe gesetzt.<sup>214</sup> Positive Abweichungen stellen eine Überschätzung des Risikos dar. Negative Abweichungen hingegen sind das Resultat einer Unterschätzung.

Bei Berücksichtigung der vollständigen Zeitreihe zur Spezifikation der Modelle (Gruppe 1) wird das Gesamtrisiko sowohl im VKA (VaR 5,397 %) als auch bei

<sup>213</sup> Vgl. Klein, A. et al., Risikoaggregation, 2014, S. 25.

<sup>214</sup> Vgl. Rosenberg, J., Schuermann, T., Integrated Risk Management, 2006, S. 604.

den Copula-Modellen (Gauß-Copula 5,394 % und t-Copula 5,494 %) unterschätzt. Die relative Unterschätzung beträgt 6,88 % bei Verwendung des VKA, 6,94 % bei Nutzung des Gauß-Copula-Modells und 5,21 % bei Einsatz des t-Copula-Modells. Die Unterschätzung beim Gauß-Copula-Modell ist damit am größten. Beim t-Copula-Modell ist die Abweichung zum Risiko der Ausgangszeitreihe kleiner als bei Nutzung des Gauß-Copula-Modells. Dies ist auf die Berücksichtigung der Randabhängigkeiten in der t-Copula zurückzuführen, was zu höheren Risikowerten führt.<sup>215</sup>

Das Risiko in der Gruppe der konservativen Modelle wird durchweg überschätzt. Den höchsten insgesamt berechneten Risikowert liefert mit 5,915 % der Spezialfall des VKA (einfache Addition). Dieses Ergebnis wurde auch in den Studien von *Rosenberg und Schuermann* oder *Li et al.* beobachtet.<sup>216</sup> Der Risikowert ist damit 2,04 % größer als der VaR der Ausgangszeitreihe. Dicht dahinter liegt mit 5,881 % das Risikomaß, das über den VKA (modelliert mit der höchsten Korrelation aus den rollierenden Zeitfenstern) ermittelt wurde. Hier liegt eine Überschätzung von 1,46 % vor. Eine etwa gleich große Überschätzung in Höhe von 1,50 % liefert das Risikomaß aus dem t-Copula Modell mit der maximalen Rangkorrelation (Wert 5,883 %). Aufgrund der Randunabhängigkeit ist der VaR aus dem Gauß-Modell mit 5,820 % geringer als der Wert aus dem vergleichbaren t-Copula-Modell. Dieser ist mit einer Abweichung von 0,42 % vergleichsweise dicht am Risikomaß der Ausgangszeitreihe. Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die geringste Abweichung zum VaR der Ausgangszeitreihe bei einem Konfidenzniveau von 99,9 % die konservativen spezifizierten Modelle liefern.

Für den Expected Shortfall sind die Ergebnisse grundsätzlich vergleichbar. Der Erwartungswert des Verlustes der Ausgangszeitreihe unter der Bedingung, dass bei einem Betrachtungshorizont von einem Jahr ein Verlust eintritt, der das 99,9 % Konfidenzniveau überschreitet, beträgt 6,591 % (Benchmark für ES-Schätzer). Bei Verwendung des ES liefert das Gauß-Copula-Modell in der Gruppe 1 mit 6,008 % den niedrigsten Risikowert und gleichzeitig mit 8,85 % die größte Unterschätzung des Risikos. Der VKA quantifiziert den aggregierten ES auf 6,139 %. Die Unterschätzung im Vergleich zum Risiko der Ausgangszeitreihe beträgt dabei immer noch 6,86 %. Bei dem Schätzer des t-Copula-Modells

---

<sup>215</sup> Vgl. Rosenberg, J., Schuermann, T., *Integrated Risk Management*, 2006, S. 607; Li, J. et al., *Aggregation*, 2015, S. 180.

<sup>216</sup> Vgl. Rosenberg, J., Schuermann, T., *Integrated Risk Management*, 2006, S. 612; Li, J. et al., *Aggregation*, 2015, S. 181.

mit einem Wert von 6,151 % beträgt die Unterschätzung 6,68 %. Damit liegt dieser Schätzer in der Gruppe 1 am dichtesten an der Benchmark für den ES-Schätzer.

In der Gruppe 2 sind die über die Varianz-Kovarianz-Ansätze berechneten Risikowerte wieder durchweg konservativer als das Risikomaß der Ausgangszeitreihe. Die höchste Überschätzung des Risikos (1,83 % größer als die Benchmark) stammt mit einem Risikowert von 6,712 % auch beim ES aus der einfachen Addition. Der zweitgrößte Risikowert (6,674 %) resultiert aus der Verwendung des VKA. Dieser Wert überschätzt das Risiko um 1,26 %. Das t-Copula-Modell liefert mit 6,522 % den Schätzer mit der kleinsten Abweichung. Das Risiko wird dabei jedoch um 1,06 % unterschätzt. Das Gauß-Copula-Modell unterschätzt das Risiko um 1,57 % noch deutlicher (ES 6,488 %).

Das Standardverfahren zur Risikoaggregation in bankaufsichtlichen Risikotragfähigkeitskonzepten stellt die einfache Addition dar.<sup>217</sup> Da dieses Verfahren die höchsten Risikowerte liefert, ist der Einsatz der anderen Konzepte zur Aggregation der Risiken mit einer Einsparung an ökonomischem Kapital verbunden. Zur Berechnung des Einsparpotentials kann die Differenz zwischen dem Risikomaß aus dem jeweiligen Konzept und dem Risikomaß der einfachen Addition ins Verhältnis zum Risikomaß der einfachen Addition gesetzt werden (siehe Tabelle 2).<sup>218</sup>

---

<sup>217</sup> Vgl. Bartetzky, P., Gesamtbanksteuerung, 2012, S. 108.

<sup>218</sup> Vgl. Rosenberg, J., Schuermann, T., Integrated Risk Management, 2006, S. 605; Li, J. et al., Aggregation, 2015, S. 182.

Einsparpotential	99,9 % VaR	99,9 % ES
VKA (Gesamtzeitreihen-Korrelation)	8,75 %	8,54 %
Gauß-Copula	8,80 %	10,48 %
t-Copula	7,11 %	8,36 %
VKA (Konservative Korrelation)	0,57 %	0,56 %
Gauß-Copula (konservativ)	1,60 %	3,34 %
t-Copula (konservativ)	0,54 %	2,84 %

Tabelle 3: Einsparpotential gegenüber der einfachen Addition

Das Einsparpotential der Modelle aus Gruppe 1 ist in dem Stresstestszenario deutlich höher ausgeprägt als in der konservativen Gruppe 2. Bei Nutzung des VKA, der an der Gesamtzeitreihe spezifiziert wurde, ist das Gesamtrisiko im Vergleich zur einfachen Addition 8,75 % (Verwendung 99,9 % VaR) bzw. 8,54 % (99,9 % ES) kleiner. Das Gauß-Copula-Modell der Gruppe 1 generiert einen Gesamtrisikoschätzer, der 7,11 % (VaR) bzw. 8,36 % (ES) kleiner ist. Bei Verwendung des t-Copula-Modells können 7,11 % (VaR) bzw. 8,36 % (ES) eingespart werden. Bei diesen Ergebnissen ist jedoch zu berücksichtigen, dass die Einsparungen aus den Modellen der Gruppe 1, wie zuvor gezeigt, zu einem großen Teil auf der Unterschätzung des Risikos beruhen.

Die Einsparungen in den konservativen Modellen betragen bei Nutzung des VaR 0,54 % beim t-Copula-Modell, 0,57 % beim VKA und 1,60 % beim Gauß-Copula-Modell. Bei Verwendung des ES als Risikomaß sind Einsparungen von 0,56 % (VKA), 2,84 % (t-Copula-Modell) und 3,34 % (Gauß-Copula-Modell) erzielbar. Das Einsparpotential der Copula-Modelle ist bei Verwendung des ES zu einem Teil ebenfalls auf die Unterschätzung des Risikos zurückzuführen.

Um sicherzustellen, dass diese Ergebnisse unabhängig von den konkret gewählten Eingangsparametern sind, werden in den nachfolgenden Unterkapiteln Sensitivitätsanalysen durchgeführt. Die Konfidenzniveaus, die Anteile der Risiken am Gesamtrisiko-Exposure und die Risikoparameter der Einzelrisikoverteilungen werden unter der ceteris paribus-Annahme der übrigen Variablen variiert. Es werden dabei die Auswirkungen auf die Abweichungen der Risikomaße und das erzielbare Einsparpotential untersucht.

### 5.5.1 Sensitivität gegenüber Veränderungen des Konfidenzniveaus

Mit steigendem Konfidenzniveau steigen auch die Risikomaße.<sup>219</sup> Der VaR der Ausgangszeitreihe bei einem Konfidenzniveau von 90 % beträgt 2,299 %, während er bis zum 99,99 % Niveau auf 7,470 % ansteigt. Der ES steigt im gleichen Intervall von 3,034 % auf 7,920 %. Da die Abweichungen zum Risikomaß der Ausgangszeitreihe für diese Untersuchung interessanter als die absoluten Risikomaße sind, werden in Abbildung 10 und 11 die relativen Abweichungen zum VaR bzw. ES der Ausgangszeitreihe dargestellt.

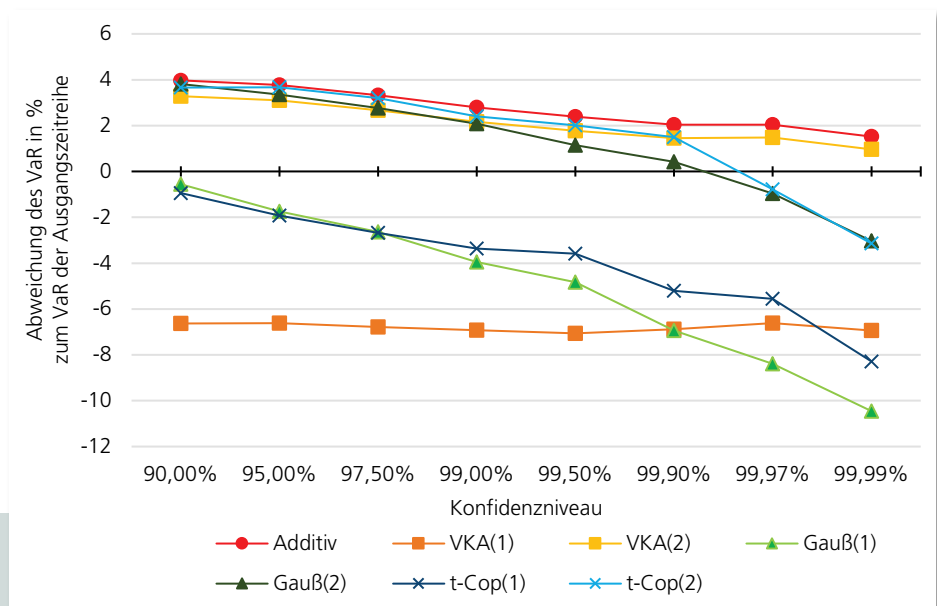


Abbildung 10: Abweichung der VaR-Schätzer bei unterschiedlichen Konfidenzniveaus

Bei den Modellierungen der Gruppe 1 fällt auf, dass bei einem Konfidenzniveau von 90 % das Gauß- und t-Copula-Modell den Risikowert der Ausgangszeitreihe nur geringfügig unterschätzen (Unterschätzung von 0,56 % bzw. 0,94 %). Mit steigendem Konfidenzniveau nimmt die Unterschätzung des Risikowertes durch diese Modelle deutlich zu. Bei einem Konfidenzniveau von 99,99 % unterschätzt das Gauß-Copula-Modell den VaR der Ausgangszeitreihe um 10,45 %. Das t-Copula-Modell unterschätzt das Risiko bei diesem Niveau

<sup>219</sup> Ähnliche Ergebnisse sind auch in Li, J. et al. (Aggregation, 2015) zu finden. Siehe ebd. S. 181.

um 8,29 %. Die Unterschätzung bei Nutzung des VKA ist bei einem Konfidenzniveau von 90 % zwar mit 6,63 % deutlich höher als bei den Copula-Modellen, mit steigendem Niveau bleibt die Abweichung zur Benchmark aber nahezu unverändert. Bei einem Konfidenzniveau von 99,99 % unterschätzt der VKA das Risiko um 6,94 %. Damit liegt die Risikoschätzung dichter an dem tatsächlichen Risiko der Ausgangszeitreihe als die Risikoschätzer des Gauß-Copula-Modells zu diesem Konfidenzniveau.

In der konservativen Gruppe verhält es sich umgekehrt. Mit steigendem Konfidenzniveau sinken die Abweichungen zur Benchmark. Dabei kann analog zur Studie von *Li et al.* beobachtet werden, dass die Abweichungen aus den Varianz-Kovarianz-Ansätzen und den Copula-Modellen bei hohen Konfidenzniveaus weiter auseinanderliegen als bei niedrigen.<sup>220</sup> Während alle vier Methoden bei einem Konfidenzniveau von 90 % den Risikowert noch um durchschnittlich 3,68 % überschätzen (Einfache Addition: 3,97 %; Gauß-Copula: 3,81 %; t-Copula: 3,66 %; VKA: 3,28 %), vergrößern sich die Abweichungen zwischen den Aggregationskonzepten mit steigendem Konfidenzniveau. Die einfache Addition liefert konstant die höchsten Überschätzungen und damit die höchsten Risikowerte (Überschätzung zum 90 % Niveau: 3,97 % und zum 99,99 % Niveau: 1,52 %). Die Überschätzung des VKA beträgt beim 99,99 % Niveau 0,96 %. Bei den Copula-Modellen hat sich zum 99,99 % Niveau hingegen die Überschätzung in eine Unterschätzung umgekehrt (Unterschätzung: Gauß-Copula-Modell: 3,03 % und t-Copula-Modell: 3,14 %). Die kleinste Überschätzung liefert das Gauß-Copula-Modell mit 0,42 % bei einem 99,9 % Konfidenzniveau. Der beste Schätzer aus dem t-Copula-Modell tritt bei einem 99,97 % Niveau auf. Das Risiko wird hierbei mit 0,78 % jedoch geringfügig unterschätzt.

Aus dem Diagramm lässt sich ebenfalls die Differenz zwischen einem beliebigen Risikomaß zum Risikomaß aus der einfachen Addition (oberste Linie in Abbildung 11) ableiten. Dies ist eine erste Indikation für das erzielbare Einsparpotential.<sup>221</sup> So kann festgestellt werden, dass beide Varianz-Kovarianz-Ansätze unabhängig vom konkreten Konfidenzniveau ein sehr konstantes Einsparpotential

---

<sup>220</sup> Vgl. Li, J. et al., Aggregation, 2015, S. 181.

<sup>221</sup> Für das relative Einsparpotential muss diese Differenz noch ins Verhältnis zum Risikoschätzer aus der einfachen Addition gesetzt werden.



gegenüber der einfachen Addition liefern, da die gewählte (konstante) Korrelationsmatrix die Höhe der Diversifikationseffekte festlegt.<sup>222</sup> Das relative Einsparpotential beträgt bei Nutzung eines konservativen VKA-Schätzers<sup>223</sup> im Vergleich zum Schätzer der einfachen Addition im Mittel 0,61 %. Bei den konservativen Copula-Modellen steigt das Einsparpotential hingegen mit steigendem Konfidenzniveau von 0,15 % (Gauß-Copula) und 0,30 % (t-Copula) auf bis zu 4,48 % (Gauß-Copula) bzw. 4,59 % (t-Copula) an. Die beiden letztgenannten Werte beruhen dabei bereits auf einer Unterschätzung des Risikos.

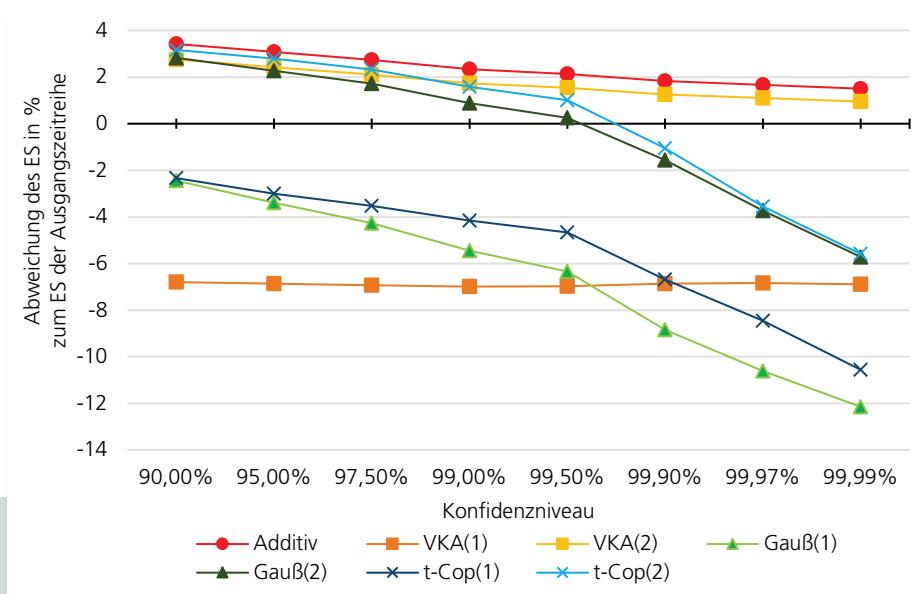


Abbildung 11: Abweichungen der ES-Schätzer bei unterschiedlichen Konfidenzniveaus

Die Unterschätzungen bei Betrachtung des ES in Gruppe 1 sind im Vergleich zum VaR durchweg über alle Konfidenzniveaus größer (Unterschätzungen 90 % Niveau t-Copula: 2,34 %; Gauß-Copula: 2,45 %; VKA: 6,80 % bis 99,99 % Niveau t-Copula: 10,56 %; Gauß-Copula: 12,14 %; VKA: 6,89 %). Insbesondere die Messung des ES über die Copula-Modelle generiert höhere Unterschätzungen als beim VaR und analog zum VaR nimmt die Abweichung der Copula-Mo-

<sup>222</sup> S. dazu: Li, J. et al., Aggregation, 2015, S. 185.

<sup>223</sup> Da die Einsparungen der Modelle der Gruppe 1 zu einem Großteil auf der Unterschätzung des Risikos beruhen, wird auf eine Darstellung der Werte nachfolgend verzichtet.

delle mit steigendem Konfidenzniveau stärker zu als beim VKA. Bei einem Niveau von 99,97 % liefert der VKA sogar die geringste Abweichung innerhalb der Gruppe 1.

In der Gruppe 2 sind die Überschätzungen des ES geringer als beim VaR. Beim 90 % Niveau beträgt die Überschätzung maximal 3,42 % (Einfache Addition) und minimal 2,76 % (VKA). Zum 99,99 % Niveau wird der ES der Ausgangszeitreihe bei Verwendung der Varianz-Kovarianz-Ansätze nur noch um 1,50 % (Einfache Addition) bzw. 0,95 % (VKA) überschätzt. Dagegen wechselt die Abweichung der Copula-Modelle mit steigendem Konfidenzniveau wieder das Vorzeichen. Während das Risiko bei einem 90 % Niveau noch um 2,83 % (Gauß-Copula) bzw. 3,16 % (t-Copula) überschätzt wird, beträgt die Unterschätzung zum 99,9 % Niveau bereits 1,57 % (Gauß-Copula) bzw. 1,06 % (t-Copula). Die Überschätzung aus dem Gauß-Copula-Modell zum 99,50 % Niveau stellt mit 0,26 % die kleinste Abweichung in dieser Szenarioanalyse dar.

Die relativen Verhältnisse der Linien im Diagramm zueinander sind sehr ähnlich zu den Verhältnissen bei Verwendung des VaR. Der Mittelwert des Einsparpotentials bei den konservativen VKA beträgt 0,59 % und fällt damit ein wenig niedriger als bei Nutzung des VaR als Risikomaß aus. Die möglichen Einsparungen der Copula-Modelle sind größer als bei Verwendung des VaR und nehmen mit steigendem Konfidenzniveau zu. Bei einem 99,99 % Konfidenzniveau ist der Schätzer des Gauß-Copula-Modells 7,11 % niedriger als der Schätzer aus der einfachen Addition. Die Einsparung beim t-Copula-Modell würde 6,98 % betragen. Hierbei wird das Risiko der Ausgangszeitreihe jedoch um 5,72 % (Gauß-Copula) bzw. 5,59 % (t-Copula) unterschätzt.

Insgesamt lässt sich festhalten, dass die Schätzer der Copula-Modelle eine höhere Sensitivität zum gewählten Konfidenzniveau aufweisen als die Schätzer der Varianz-Kovarianz-Ansätze. Aus den Copula-Modellen beider Gruppen stammten sowohl die kleinsten (Gruppe 1 bei den niedrigen Konfidenzniveaus; Gruppe 2 bei den höheren Niveaus) als auch die größten Abweichungen zum Risikomaß der Ausgangszeitreihe. Nur bei Verwendung der Varianz-Kovarianz-Ansätze der Gruppe 2 (einfache Addition und maximale Korrelation) lässt sich eine Unterschätzung der Risikomaße zuverlässig ausschließen. Zudem nimmt bei diesen die Abweichung zur Benchmark mit steigendem Konfidenzniveau ab. Die Schätzer der Gruppe 1 lieferten bei allen Verfahren über alle Niveaus hinweg zu niedrige Risikowerte. Das Einsparpotential nimmt bei Verwendung der Copula-Modelle

mit steigendem Konfidenzniveau zu, während es bei den Varianz-Kovarianz-Ansätzen nahezu konstant bleibt.

### 5.5.2 Sensitivität gegenüber Veränderungen der Risikoanteile

Für den Einfluss des Risikoanteils und der später folgenden Variation der Standardabweichungen auf das Gesamtrisiko ist die Betrachtung der aus der Risikoaggregation resultierenden Gesamtrisikoverlustverteilung hilfreich. Bei einer Simulation von 100.000 Datenpunkten hat die Gesamtrisikoverlustverteilung der Ausgangszeitreihe nachfolgende Form (siehe Dichtefunktion in Abbildung 12):

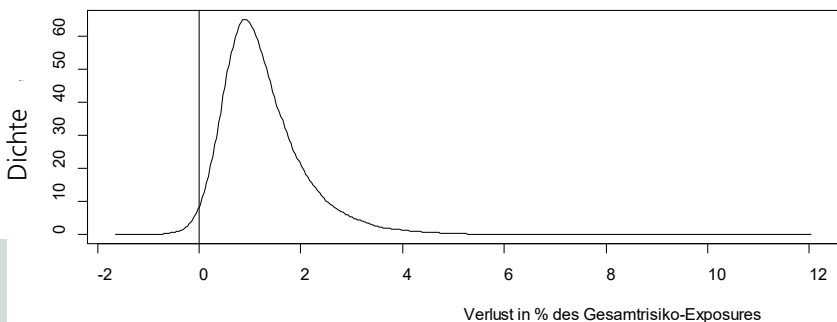


Abbildung 12: Empirische Gesamtrisikoverlustverteilung der Ausgangszeitreihe

Besonders deutlich lässt sich der Einfluss der Adressenausfallrisikoverteilung (Vasicek-Verteilung aus Abbildung 7) in der Form der Wahrscheinlichkeitsdichte des Gesamtverlustes erkennen. Die negativen Verluste (Renditechancen) stammen aus der Marktpreisrisikoverteilung (t-Verteilung aus Abbildung 8). Der Einfluss ist jedoch durch den relativ geringen Anteil am Gesamtrisiko-Exposure begrenzt. Die logarithmierte Normalverteilung des operationellen Risikos (dargestellt in Abbildung 9) sorgt dafür, dass sich im Vergleich zur Verteilung des Adressenausfallrisikos mehr Dichte im niedrigen Verlustbereich (ca. bei 1 % Verlust) konzentriert und die Gesamtverlustverteilung eine geringere Standardabweichung aufweist.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Marktpreisrisikos weist im Vergleich zu den Verteilungen des Adressenausfallrisikos und des operationellen Risikos eine höhere Volatilität auf. Eine Steigerung des Marktpreisrisikoanteils zu Lasten des

Adressenausfallrisikoanteils (und somit einem konstanten Anteil des operationellen Risikos von 67 %) am Gesamtrisiko-Exposure resultiert daher in höheren relativen Gesamtverlusten.<sup>224</sup>

Bei einem Marktpreisrisikoanteil von 0 % und dementsprechend einem Anteil des Adressenausfallrisikos von 33 % beträgt der 99,9 % VaR der Ausgangszeitreihe 5,087 % bzw. der 99,9 % ES 5,772 %. Die Risikomaße steigen kontinuierlich an.<sup>225</sup> Bei einem Marktpreisrisikoanteil von 33 % betragen die Risikomaße schließlich 13,948 % (99,9 % VaR) bzw. 15,886 % (99,9 % ES). Die relativen Abweichungen zum Risikomaß der Ausgangszeitreihe sind für den VaR in Abbildung 13 dargestellt. Auf eine Darstellung der Abweichungen bei Nutzung des ES wurde verzichtet, da sich die Ergebnisse nur geringfügig unterscheiden. Die Kurven der Abweichungen bei Verwendung des ES sind auf der Skala nach unten verschoben. Während die Copula-Modelle beider Gruppen das Risiko durchweg unterschätzten, konnten nur die konservativen VKA eine Unterschätzung des Risikos verhindern.

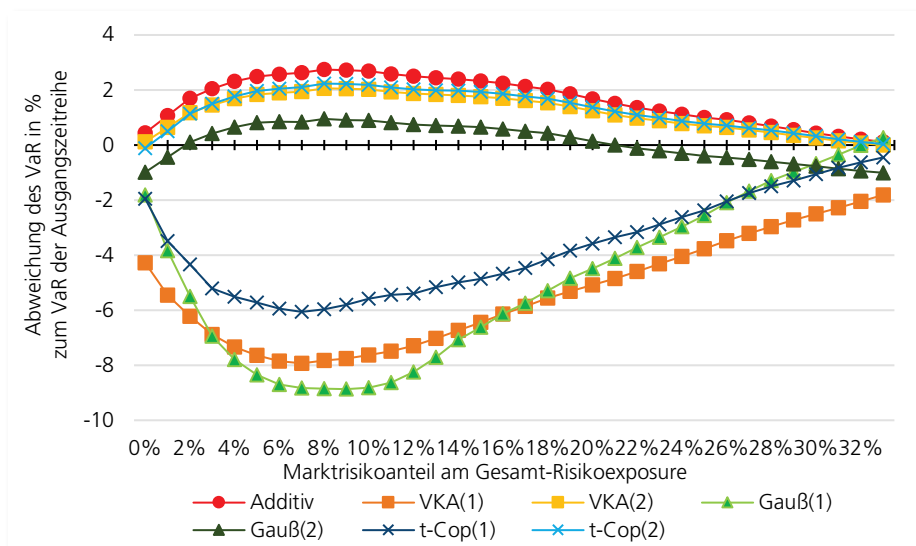


Abbildung 13: Abweichung 99,9 % VaR-Schätzer bei unterschiedlichen Marktpreisrisikoanteilen (Anteil des operationellen Risikos c.p. 67 %)

<sup>224</sup> Vgl. Rosenberg, J., Schuermann, T., Integrated Risk Management, 2006, S. 602.

<sup>225</sup> Rosenberg und Schuermann (Integrated Risk Management, 2006) konnten ein vergleichbares Verhalten beobachten. Vgl. ebd. S. 597, 602.

Die Abweichungen der Gruppe 1 bilden jeweils einen konvexen Verlauf im Diagramm in Abbildung 13. Das Gauß-Copula-Modell reagiert sensibler auf eine Änderung des Marktpreisrisikoanteils als die beiden anderen Verfahren der Gruppe 1. Die Abweichungen dieses Modells nehmen mit steigendem Marktpreisrisikoanteil tendenziell zuerst bis zu einem Anteil von 9 % stärker zu und danach stärker ab.

Bei einem Marktpreisrisikoanteil von 0 %, also nur dem Vorhandensein von Adressenausfallrisiken und operationellen Risiken, ist die Unterschätzung beim Gauß-Copula-Modell mit 1,81 % minimal (Unterschätzung t-Copula 1,96 % und VKA 4,28 %). Mit steigendem Marktpreisrisikoanteil steigt die Unterschätzung bis zu einem Anteil von 7-9 %. Für das t-Copula-Modell und den VKA liegt die maximale Unterschätzung bei einem Marktpreisrisikoanteil von 7 % mit 6,06 % bzw. 7,93 %. Beim Gauß-Copula-Modell wird das Risiko bei einem Anteil von 9 % mit 8,87 % unterschätzt. Mit weiter steigenden Marktpreisrisikoanteilen sinken die Abweichungen wieder. Bei einem Anteil von 33 % und einem entsprechenden Anteil des Adressenausfallrisikos von 0 % beträgt die Unterschätzung im VKA 1,81 % und beim t-Copula-Modell 0,45 %. Das Gauß-Copula-Modell überschätzt das Risiko um 0,27 %.

In der Gruppe 2 folgen die Abweichungen einem konkaven Verlauf. Beide Varianz-Kovarianz-Ansätze überschätzen das Risiko konstant. Die Schätzer und Abweichungen des VKA und des t-Copula-Modells liegen zudem dicht nebeneinander. Bei einem Anteil des Marktpreisrisikos von 0 % ist der VaR aus der einfachen Addition 0,45 % und der VaR aus dem VKA 0,12 % größer als das Risikomaß der Ausgangszeitreihe. Bei der einfachen Addition steigt die Überschätzung maximal auf 2,74 % bei einem Marktpreisrisikoanteil von 8 %. Danach fällt die Überschätzung konstant, bis sie bei einem Marktpreisrisikoanteil von 33 % das absolute Minimum von 0,12 % erreicht. Bei dem VKA steigt die Überschätzung auf maximal 2,06 % bei einem Anteil von 8 % und fällt danach bis zu einem Anteil des Marktpreisrisikos von 33 % auf minimale 0,001 % ab.

Die Abweichungen der Schätzer des Gauß-Copula-Modells wechseln mehrfach die Vorzeichen. Bei einem Marktpreisrisikoanteil von 0 % wird das Risikomaß mit dem Gauß-Copula-Modell um 0,98 % unterschätzt. Bei einem Anteil von 2 % wechselt die Abweichung in den Bereich der Überschätzung und steigt mit wachsendem Anteil beim Gauß-Copula-Modell auf 0,95 % (Marktpreisrisikoanteil 8 %). Der nächste Vorzeichenwechsel der Abweichung wird im Gauß-Copula-Modell nach einem Anteil von 21 % erreicht (Marktpreisrisikoanteil 20 %:

Überschätzung 0,14 %; Anteil 21 %: Unterschätzung von 0,01 %). Die größte Unterschätzung tritt bei einem Anteil von 33 % mit 1,01 % auf. Der Schätzer des t-Copula-Modells bei einem Marktpreisanteil von 0% unterschätzt das Risiko um 0,11 %. Mit steigendem Anteil wird das Risiko überschätzt. Bei einem Anteil von 8 % beträgt die Überschätzung bei diesem Copula-Modell 2,23 %. Danach sinkt die Überschätzung konstant, bis sie bei einem Anteil von 33 % nur noch 0,03 % beträgt. Insgesamt betrachtet sind die Unterschätzungen bei beiden Copula-Modellen nur minimal.

Bei Marktpreisisikoanteilen von nahe 0 % bzw. nahe 33 % erscheint der Einsatz eines für drei Risikoarten parametrisierten Modells generell nicht sinnvoll.<sup>226</sup> Dies sollte bei der Interpretation der Ergebnisse berücksichtigt werden. Auch in dieser Betrachtungsebene zeigt sich, dass nur die konservativen Varianz-Kovarianz-Ansätze der Gruppe 2 eine Unterschätzung des Risikos zuverlässig ausschließen können. Der Einsatz von Copula-Modellen kann die Schätzgenauigkeit erhöhen. Eine Unterschätzung ist jedoch nicht für jede Variablenkonstellation ausgeschlossen.

Das größte Einsparpotential im Vergleich zur Verwendung der einfachen Addition liegt nahe den Extrempunkten der Kurven. So tritt beim konservativen VKA die größte Einsparung in Höhe von 0,66 % bei einem Marktpreisisikoanteil von 7 % auf. Beim Gauß-Copula-Modell liegt das Maximum von 1,77 % bei einem Anteil von 9 %. Das t-Copula-Modell liefert hiervon abweichend bei einem Anteil des Marktpreisisikos von 0 % die größte Einsparung mit 0,56 %. Bei Betrachtung der Mittelwerte der Einsparungen fällt auf, dass das Gauß-Copula-Modell mit 1,51 % auch insgesamt die höchsten Einsparungen ermöglicht. Abgeschlagen folgen der VKA mit 0,44 % und das t-Copula-Modell mit 0,35 %. In der Gruppe 1 sind maximal Ersparnisse von 11,29 % (Gauß-Copula) bei einem Marktpreisisikoanteil von 9 % bzw. bei einem Anteil von 8 % 10,29 % (VKA) und 8,48 % (t-Copula) möglich.

Bei Betrachtung des ES fallen die Mittelwerte der Einsparpotentiale bei den konservativen Copula-Modellen höher aus, während der Mittelwert des konservativen VKA mit 0,43 % ungefähr identisch zum Mittelwert bei Nutzung des VaR ist. Für das Gauß-Copula-Modell beträgt der Mittelwert 3,24 % und für das t-Copula-Modell 2,72 %. Dabei sind diese Werte stärker durch Unterschätzungen des Risikos geprägt, als dies bei Nutzung des VaR der Fall war.

---

<sup>226</sup> Vgl. Rosenberg, J., Schuermann, T., *Integrated Risk Management*, 2006, S. 602.

Da das operationelle Risiko aus der logarithmierten Normalverteilung im Vergleich zu den beiden anderen Risiken betragsmäßig kleiner ist, sinkt der 99,9 % VaR bzw. der 99,9 % ES mit steigendem Anteil des operationellen Risikos am Gesamtrisiko-Exposure und gleichbleibendem Verhältnis vom Marktpreis- zum Adressenausfallrisiko-Exposure. Bei einem Anteil des operationellen Risikos von 0 % beträgt der VaR 14,874 % und der ES 17,201 %, während die Risikomaße bei einem Anteil von 100 % nur noch 1,350 % (VaR) bzw. 1,387 % (ES) ausmachen.<sup>227</sup> Auch bei dieser Betrachtung gilt, dass der vollständige Wegfall von Marktpreis- und Adressenausfallrisiko bei der Nutzung eines Risikomodells für drei Risikoarten nicht sinnvoll ist. Die relativen Abweichungen zum Risikomaß der Ausgangszeitreihe sind für den VaR im Diagramm in Abbildung 14 dargestellt. Auf die Darstellung bei Verwendung des ES wird analog zum Marktpreisrisikoanteil verzichtet.

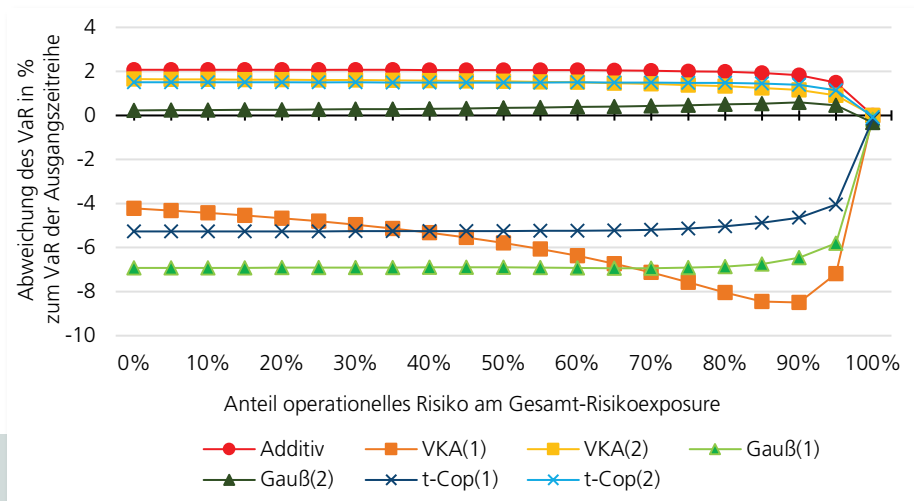


Abbildung 14: Abweichung 99,9 % VaR-Schätzer bei unterschiedlichen Anteilen des operationellen Risikos (Verhältnis Adressenausfall- und Marktpreisrisiko c.p.)

Mit steigendem Anteil des operationellen Risikos nimmt bei den Verfahren der Gruppe 1, außer beim VKA, die Abweichung leicht ab, bis sie bei einem Anteil von 100 % minimal ist. Das Gauß-Copula-Modell unterschätzt das Risiko bei einem Anteil des operationellen Risikos von 0 % um 6,93 %. Bei einem Anteil

<sup>227</sup> Rosenberg und Schuermann (Integrated Risk Management, 2006) konnten ein vergleichbares Verhalten beobachten. Vgl. ebd. S. 597, 602, 606 f.

von 90 % hat die Unterschätzung sich auf 6,46 % verkleinert. Sofern nur das operationelle Risiko vorhanden ist, beträgt die Unterschätzung schließlich nur noch 0,18 %. Die Unterschätzung aus dem t-Copula-Modell startet mit 5,27 % bei einem Anteil von 0 % und vergrößert sich auf 4,64 % bei einem Anteil von 90 %. Bei einem völligen Fehlen der beiden anderen Risiken liegt die Unterschätzung nur noch bei 0,15 %. Der VKA verhält sich völlig anders. Während bei einem Anteil von 0 % die Unterschätzung noch 4,22 % beträgt und damit am geringsten innerhalb der Gruppe 1 ist, steigt diese bis auf einen Wert von 8,49 % bei einem Anteil des operationellen Risikos von 90 % an. Mit weiter steigendem Anteil fällt sie sehr stark ab bis sie bei einem Anteil von 100 % komplett wegfällt (Abweichung 0 %).

Der VKA basiert auf der Annahme einer multivariaten Normalverteilung. Die in diesem Stresstestszenario für die Modellierung des operationellen Risikos verwendete logarithmierte Normalverteilung weicht stark hiervon ab. Mit zunehmendem Anteil des operationellen Risikos wird die Modellanforderung immer weniger erfüllt. Da zudem die Korrelationen der Gesamtzeitreihe verwendet werden, wird der Einfluss der anderen beiden Risikoarten im Gegensatz zum konservativen VKA zusätzlich begrenzt. Daher können insbesondere beim VKA der Gruppe 1 starke Verzerrungen beobachtet werden.<sup>228</sup>

In der Gruppe 2 nimmt die Überschätzung bei der einfachen Addition von 2,07 % (Anteil 0 %) auf 1,83 % (Anteil 90 %) leicht ab. Beim konservativen VKA sinkt die Abweichung ebenfalls. So wird das Risiko bei einem Anteil von 0 % um 1,65 % und bei einem Anteil von 90 % um 1,16 % überschätzt. Bei einem Anteil des operationellen Risikos von 100 % ist bei beiden Verfahren keine Abweichung mehr vorhanden. Beim t-Copula-Modell wird das Risiko um 1,50 % bei einem Anteil von 0 % und um 1,40 % bei einem Anteil von 90 % überschätzt. Die Überschätzung aus dem Gauß-Copula-Modells hingegen steigt in diesem Intervall leicht an. Bei einem Anteil von 0 % beträgt sie noch 0,23 %, während sie bei einem Anteil von 90 % schon 0,60 % ausmacht. Bei Wegfall der beiden anderen Risikoarten unterschätzen beide Modelle das Risiko um 0,08 % (t-Copula) bzw. 0,33 % (Gauß-Copula).

Die Copula-Modelle sind relativ unempfindlich gegenüber einem steigenden Anteil des operationellen Risikos. Insbesondere der VKA der Gruppe 1 reagiert hingegen sehr sensitiv auf eine Änderung des operationellen Risikos. Diese Schwäche kann durch eine konservativere Parametrisierung ausgeglichen werden. So

---

<sup>228</sup> S. dazu: Rosenberg, J., Schuermann, T., Integrated Risk Management, 2006, S. 576.



können die einfache Addition und der konservative VKA eine Unterschätzung auch bei hohen Anteilen des operationellen Risikos zuverlässig ausschließen.

Die Mittelwerte der Einsparpotentiale in der konservativen Gruppe ohne die Berücksichtigung der Einsparung bei einem Anteil des operationellen Risikos von 100 % betragen 0,52 % beim VKA, 0,53 % beim t-Copula-Modell und 1,62 % beim Gauß-Copula-Modell. Das größte Einsparpotential bei Betrachtung aller Modelle liefert der VKA der Gruppe 1 bei einem Anteil von 85 %. Hier ist der Schätzer 10,18 % niedriger als der Schätzer aus der einfachen Addition, was sehr stark auf eine Unterschätzung des Risikos zurückzuführen ist.

Die vergleichbaren Mittelwerte bei Verwendung des ES betragen 0,51 % beim VKA, 2,86 % beim t-Copula-Modell und 3,36 % beim Gauß-Copula-Modell. Hier basieren die Einsparungen der Copula-Modelle jedoch auf der Unterschätzung des Risikos.

### 5.5.3 Sensitivität gegenüber Veränderungen der Standardabweichungen

Eine Veränderung der Ausfallwahrscheinlichkeit bei Nutzung des IRB-Ansatzes geht immer auch mit einer Änderung der aufsichtlich vorgegebenen Ausfallkorrelation einher. Durch die vorgegebene Berechnungslogik für die Ausfallkorrelation aus Art. 154 Abs. 1 Alt. ii CRR sinkt diese mit steigender Ausfallwahrscheinlichkeit. Diese inverse Beziehung ist der Annahme geschuldet, dass steigende Ausfallwahrscheinlichkeiten insbesondere auf eine Verschlechterung der Kreditwürdigkeit eines einzelnen Schuldners und nicht auf eine Verschlechterung der allgemeinen Marktbedingungen zurückzuführen sind.<sup>229</sup> Sinkende Ausfallkorrelationen führen zu sinkenden Risikowerten und geringfügig größer werdenden Abweichungen.<sup>230</sup> Um im Rahmen der hier durchgeführten Stresstestbetrachtung Verzerrungen in den Ergebnissen durch den gegenläufigen Effekt einer Anpassung der Ausfallkorrelation auszuschließen, wird diese in der folgenden Betrachtung auf 10 % festgesetzt. Zudem muss in Stressperioden davon ausgegangen werden, dass der Anstieg der Ausfallwahrscheinlichkeiten auch auf eine Verschlechterung der Marktbedingungen zurückzuführen ist.

---

<sup>229</sup> Vgl. Hull, J., Risikomanagement, 2016, S. 386.

<sup>230</sup> Dieses Ergebnis stammt aus einer hier nicht wiedergegebenen Sensitivitätsanalyse bei Veränderung der Ausfallkorrelation und gleichbleibender PD.

Bei einer Ausfallwahrscheinlichkeit (PD) von 2 % p.a. beträgt der 99,9 % VaR 5,796 % und der 99,9 % ES 6,591 %. Mit steigender Wahrscheinlichkeit steigen auch die Risikomaße. Bei einer PD von 10 % wächst der VaR auf 13,134 % und der ES auf 14,343 % an. Die jeweiligen relativen Abweichungen der Schätzer sind bei Nutzung des VaR im Diagramm in Abbildung 15 dargestellt.

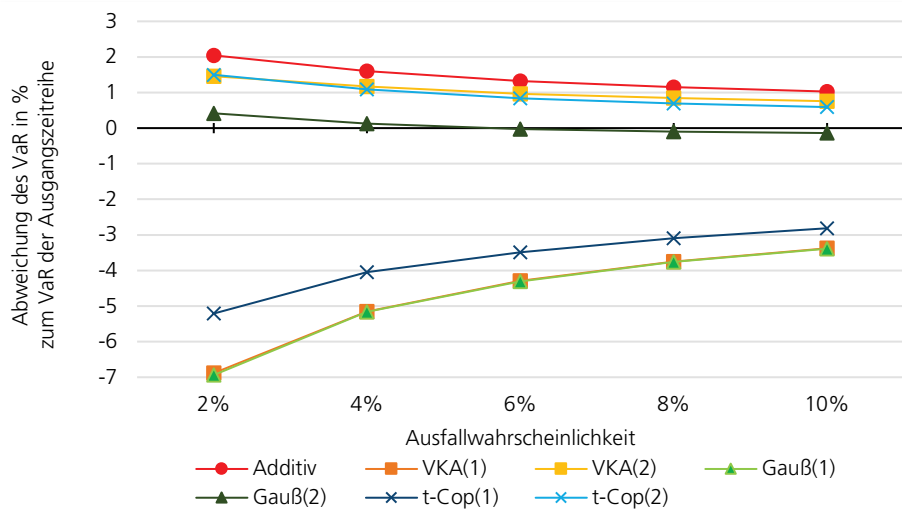


Abbildung 15: Abweichung 99,9 % VaR-Schätzer bei unterschiedlichen Ausfallwahrscheinlichkeiten (Ausfallkorrelation konstant bei 10 %)

Mit steigender Ausfallwahrscheinlichkeit verringert sich die Abweichung in beiden Gruppen und die Genauigkeit aller Schätzer steigt. Die Steigung der Kurven nimmt dabei mit zunehmender Ausfallwahrscheinlichkeit ab. Dies liegt darin begründet, dass der unerwartete Verlust und damit auch das Risiko einer Abweichung vom erwarteten Verlust mit steigenden Ausfallwahrscheinlichkeiten kleiner wird. Im extremsten Fall einer Ausfallwahrscheinlichkeit von 100 % stellt der Verlust ein sicheres Ereignis dar.<sup>231</sup> Die Unterschätzungen der Gruppe 1 verringern sich von 6,94 % (Gauß-Copula), 6,88 % (VKA) und 5,21 % (t-Copula) bei einer PD von 2 % auf 3,39 % (Gauß-Copula), 3,38 % (VKA) und 2,81 % (t-Copula) bei einer PD von 10 %.

In der Gruppe 2 beträgt die Überschätzung bei einer PD von 2 % bei der einfachen Addition 2,04 %, beim VKA 1,46 %, beim t-Copula-Modell 1,50 % und

<sup>231</sup> Vgl. Wrede, I., Ausfallwahrscheinlichkeiten, 2008, S. 22.

beim Gauß-Copula-Modell 0,42 %. Ab einer Ausfallrate von 6 % wechselt die Abweichung der Gauß-Copula das Vorzeichen. Die Unterschätzung beträgt an dieser Stelle minimale 0,03 %. Bei einer Ausfallwahrscheinlichkeit von 10 % verringern sich die Überschätzungen auf 1,03 % (einfache Addition), 0,76 % (VKA), 0,59 % (t-Copula). Die Unterschätzung des Gauß-Copula-Modells vergrößert sich hingegen auf 0,14 %. Die Schätzer des Gauß-Copula-Modells liegen damit sehr dicht am Risiko der Ausgangszeitreihe.

Das Einsparpotential bei Verwendung eines Konzeptes zur Risikoaggregation nimmt wie die Abweichung zum Benchmark-Risikomaß mit steigender Ausfallwahrscheinlichkeit ab. Bei einer PD von 2 % kann durch den Einsatz des konservativen VKA 0,57 % und beim t-Copula-Modell 0,54 % eingespart werden. Die Einsparung des konservativen Gauß-Copula-Modells ist hier höher und beträgt 1,60 %. Dieses Einsparpotential verringert sich bis auf 0,27 % (VKA), 0,43 % (t-Copula) und 1,15 % (Gauß-Copula) bei einer PD von 10 % und ist bei der Gauß-Copula minimal durch eine Unterschätzung des Risikos geprägt.

Eine Nutzung des ES ermöglicht insbesondere in Kombination mit den konservativen Copula-Modellen höhere Einsparungen. Bei einer PD von 2 % kann mit dem t-Copula-Modell 2,84 % und mit dem Gauß-Copula-Modell sogar 3,34 % eingespart werden. Dieses Potential verringert sich ebenfalls mit steigender Ausfallwahrscheinlichkeit und beträgt bei einer PD von 10 % beim t-Copula-Modell 1,96 % und beim Gauß-Copula-Modell 2,27 %. Die Copula-Modelle unterschätzen das Risiko jedoch durchweg, sodass die Einsparungen auf einer Unterschätzung des Risikos beruhen.

Der 99,9 % VaR bei einer Standardabweichung des Marktpreisrisikos von 2 % beträgt 4,917 %. Der dazugehörige 99,9 % ES beträgt 5,571 %. Mit steigender Standardabweichung steigen diese Risikowerte kontinuierlich an. Bei einer Standardabweichung von 18 % hat das Risikomaß der Ausgangszeitreihe 6,704 % (VaR) bzw. 7,633 % (ES) erreicht. Die relativen Abweichungen der VaR-Schätzer zum Risikomaß der Ausgangszeitreihe aus den unterschiedlichen Modellen sind in Abbildung 16 dargestellt. Auf die Darstellung bei Verwendung des ES wird analog zum Marktpreisrisikoanteil verzichtet.

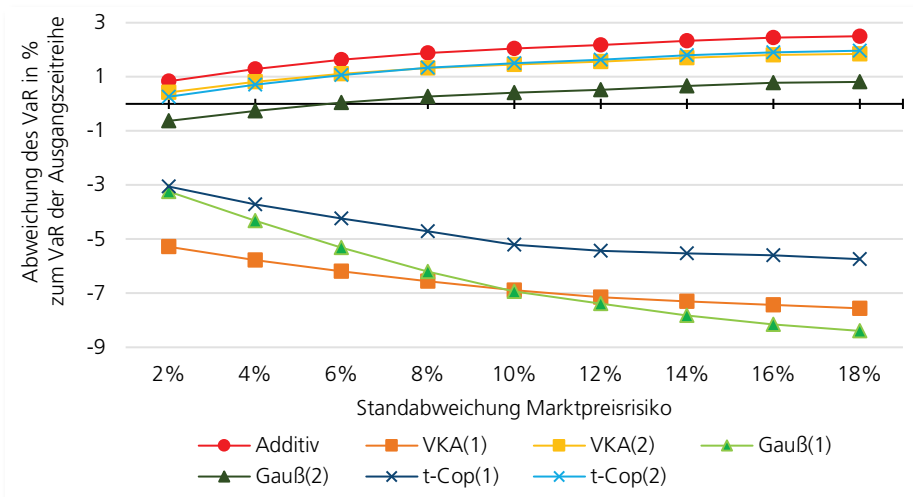


Abbildung 16: Abweichung 99,9 % VaR-Schätzer bei unterschiedlichen Standardabweichungen des Marktpreisrisikos

Mit steigender Standardabweichung wird die Unterschätzung in Gruppe 1 größer. Bei einer Standardabweichung von 2 % beträgt die Abweichung -3,06 % bei dem Schätzer der t-Copula, -3,24 % beim Schätzer der Gauß-Copula und -5,28 % beim VKA-Schätzer. Diese Unterschätzungen sind bei einer Standardabweichung von 18 % auf 5,74 % bei Nutzung des t-Copula-Modells, auf 8,39 % beim Gauß-Copula-Modell und auf 7,56 % bei Verwendung des VKA gestiegen. Die Schätzer aus dem t-Copula-Modell generieren konstant die geringsten Unterschätzungen. Es fällt zudem auf, dass die Abweichungen aus dem Gauß-Copula-Modell stärker auf eine Vergrößerung der Standardabweichung reagieren als die des VKA.

In der Gruppe 2 gibt es bei der Standardabweichung von 2 % die geringsten Abweichungen zum Risikomaß der Ausgangszeitreihe. Die Überschätzungen betragen 0,84 % bei der einfachen Addition, 0,42 % beim VKA und 0,26 % beim t-Copula-Modell. Der Schätzer aus dem Gauß-Copula-Modell weist eine Unterschätzung von 0,63 % auf. Bei einer Standardabweichung von 6 % beträgt die Überschätzung aus dem Gauß-Copula-Modell minimale 0,04 %. Damit liegt dieser Schätzer am nächsten am zu schätzenden Risikomaß der Ausgangszeitreihe. Mit steigender Standardabweichung werden auch in dieser Gruppe die Abweichungen größer. Bei einer Standardabweichung von 18 % ist das aggregierte Risikomaß der einfachen Addition 2,5 % und das des VKA 1,85 % größer

als die Benchmark. Der Schätzer des t-Copula-Modells ist ebenfalls 1,97 % größer und die Überschätzung beim Gauß-Copula-Modell beträgt 0,81 %.

Bei Betrachtung des Einsparpotentials fällt auf, dass die relativen Abweichungen zum Schätzer der einfachen Addition bei allen Verfahren beider Gruppen – außer beim konservativen t-Copula-Modell - mit steigender Standardabweichung zunehmen. Bei einer Standardabweichung von 2 % beträgt die Einsparung 0,41 % beim VKA und 1,45 % beim Gauß-Copula-Modell. Bei einer Standardabweichung von 18 % ist das Einsparpotential auf 0,64 % (VKA) bzw. 1,65 % (Gauß-Copula-Modell) gestiegen. Beim t-Copula-Modell verringert sich das Einsparpotential hingegen minimal von 0,57 % auf 0,52 %. Die maximale Einsparung in Höhe von 10,63 % würde beim Gauß-Copula-Modell der Gruppe 1 und einer Standardabweichung von 18 % vorliegen.

Während die Einsparungen bei Verwendung des VKA in Kombination mit dem ES wie bereits in den vorherigen Analysen nahezu identisch zum VaR sind, ist das Einsparpotential bei den konservativen Copula-Modellen größer. Bei einer Standardabweichung von 2 % beträgt es beim t-Copula-Modell 2,81 % bzw. beim Gauß-Copula-Modell 3,15 %. Die Einsparungen an dieser Stelle beruhen jedoch zu einem großen Teil auf der Unterschätzung des Risikos. Mit steigender Standardabweichung steigen auch hier die erzielbaren Einsparungen, sodass bei einer Abweichung von 18 % Einsparpotentiale von 2,84 % (t-Copula) bzw. 3,43 % (Gauß-Copula) bestehen, die nur noch zu einem kleinen Teil auf einer Unterschätzung des Risikos zurückzuführen sind.

Die Veränderung der Standardabweichung der Schadenshöhen hat zu Beginn nur einen minimalen Einfluss auf die Risikohöhe. Eine Standardabweichung von 0,01 % generiert einen 99,9 % VaR von 5,598 % bzw. einen 99,9 % ES von 6,368 %. Mit steigender Standardabweichung der Schadenshöhen steigen auch die Risikomaße. Bei einer Schadensstandardabweichung von 0,3 % beträgt der VaR schließlich 6,422 % und der ES 7,323 %. Die relativen Abweichungen zum Risikomaß der Ausgangszeitreihe für den VaR sind in Abbildung 17 dargestellt. Auf eine Darstellung des ES wird verzichtet.

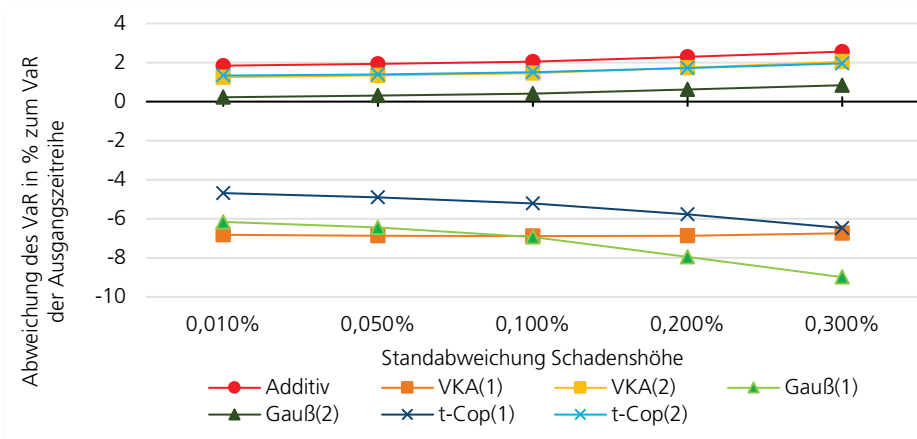


Abbildung 17: Abweichung 99,9 % VaR-Schätzer bei unterschiedlichen Schadensstandardabweichungen

Beim VKA der Gruppe 1 verringern sich die Unterschätzungen minimal von 6,83 % (Standardabweichung 0,01 %) auf 6,74 % bei einer Standardabweichung von 0,30 % und bleiben damit nahezu konstant. Die Unterschätzungen bei den Copula-Modellen in der Gruppe 1 nehmen jedoch deutlich zu. Während die Unterschätzung bei einer Standardabweichung von 0,01 % beim t-Copula-Modell 4,68 % und beim Gauß-Copula-Modell 6,16 % beträgt, hat sie sich bei einer Standardabweichung von 0,30 % auf 6,47 % (t-Copula) bzw. 8,99 % (Gauß-Copula) erhöht. Die Copula-Modelle reagieren damit sensibler auf eine Änderung der Schadensstandardabweichung.

In der Gruppe 2 kann ein ähnliches Verhalten beobachtet werden. Die Abweichungen der Varianz-Kovarianz-Ansätze werden hingegen größer. Bei 0,01 % wird das Risiko um 1,84 % (einfache Addition), 1,25 % (VKA), 1,33 % (t-Copula-Modell) bzw. 0,22 % (Gauß-Copula-Modell) überschätzt. Bei einer Standardabweichung von 0,3 % hat sich die Überschätzung auf 2,56 % (einfache Addition), 2,04 % (VKA), 1,96 % (t-Copula-Modell) bzw. 0,84 % (Gauß-Copula-Modell) erhöht. Das Gauß-Copula-Modell liefert dabei konstant die besten Schätzer.

Das Einsparpotential im Vergleich zur einfachen Addition sinkt beim konservativen VKA mit steigender Schadensstandardabweichung minimal von 0,58 % (Standardabweichung 0,01 %) auf 0,51 % (Standardabweichung 0,30 %). Bei den konservativen Copula-Modellen verhält es sich umgekehrt. Hier steigt das

Einsparpotential mit steigender Schadensstandardabweichung leicht von 0,50 % auf 0,59 % (t-Copula) bzw. von 1,59 % auf 1,68 % (Gauß-Copula).

Beim ES kann ein ähnliches Verhalten beobachtet werden. Die Höhe der Einsparpotentiale ist bei den Copula-Modellen hingegen größer. Beim t-Copula-Modell steigen die Potentiale leicht von 2,85 % auf 2,88 %, während beim Gauß-Copula-Modell die Einsparungen von 3,33 % auf 3,47 % steigen. Die Schätzer aus beiden Modellen unterschätzen das Risiko jedoch durchweg. Das Einsparpotential des VKA ist nahezu identisch zum VaR.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die Änderung der Standardabweichungen der Einzelrisikoarten unterschiedliche Effekte auf die Abweichung der Risikoschätzer und das Einsparpotential gegenüber der einfachen Addition haben. Während eine Erhöhung der Standardabweichung des Marktpreisrisikos und der Standardabweichungen der Schadenshöhen zu tendenziell höheren Abweichungen führt, sorgt eine steigende Ausfallwahrscheinlichkeit eher für geringere Abweichungen der Risikoschätzer. Damit einhergehend steigt das Einsparpotential aus der Risikoaggregation mit der Erhöhung der Standardabweichungen des Marktpreisrisikos oder der Schadenshöhen, während es bei einer Erhöhung der Ausfallwahrscheinlichkeit sinkt. Die Einsparmöglichkeiten des konservativen VKA bzw. des konservativen t-Copula-Modells verhalten sich bei einer Erhöhung der Schadensstandardabweichung bzw. der Standardabweichungen des Marktpreisrisikos hiervon abweichend und werden kleiner. In jedem Fall sind die Verfahren weniger sensitiv gegenüber einer Änderung der Standardabweichungen als gegenüber einer Änderung der Risikoartanteile.

## 5.6 Schlussfolgerungen für die Auswahl eines Aggregationskonzeptes

Im Rahmen der Sensitivitätsanalysen zeigte sich, dass die Modelle der Gruppe 1, die an der Gesamtzeitreihe spezifiziert wurden, das Risiko unabhängig von den Eingangsparametern im Krisenszenario deutlich unterschätzen. Die Risikoschätzer der Copula-Modelle der Gruppe 1 wiesen bei einem Konfidenzniveau von 90 % und Nutzung des VaR dabei nur geringfügige Unterschätzungen auf. Dieses Konfidenzniveau erfüllt jedoch nicht die Anforderungen der Aufsicht. Für den Einsatz in bankaufsichtlichen Risikotragfähigkeitskonzepten sind sowohl die Varianz-Kovarianz-Ansätze als auch die Copula-Modelle mit einer progressiven Parametrisierung daher nicht geeignet.

Erst durch die Berücksichtigung der aufsichtlichen Konservativitätsanforderung bei der Anpassung der Aggregationsmodelle konnte eine Verbesserung der Zuverlässigkeit im Stresstestszenario erzielt werden.

Bei Nutzung der einfachen Addition als Spezialfall des Varianz-Kovarianz-Ansatzes und des konservativen Varianz-Kovarianz-Ansatzes, spezifiziert mit der maximal beobachteten Korrelation aus Zeitfenstern, trat in allen Sensitivitätsanalysen keine Unterschätzung des Risikos auf. Diese beiden Verfahren eignen sich aufgrund dieser Zuverlässigkeit somit grundsätzlich für die Risikoaggregation. Die einfache Addition lieferte wie bereits in den vergleichbaren Studien konstant die höchsten Risikowerte und Überschätzungen, da hier völlige lineare Abhängigkeit (alle Korrelationen gleich Eins) unterstellt wird.<sup>232</sup> Die Aussage von *Li et al.*, dass der Varianz-Kovarianz-Ansatz durchweg die niedrigsten Risikomaße liefert, muss differenzierter betrachtet werden.<sup>233</sup> Bei einer konservativen Spezifikation liefert dieser Ansatz die zweithöchsten Risikowerte und auch bei der Spezifikation in der Gruppe 1 trifft die Aussage nur zu, wenn ein vergleichsweise hohes operationelles Risiko vorliegt. In diesen Fällen wird die Voraussetzung<sup>234</sup> zur Nutzung des Varianz-Kovarianz-Ansatzes besonders stark verletzt, was sich in hohen Verzerrungen äußert. Bei niedrigen operationellen Risiken können die Risikomaße der Copula-Modelle durchaus kleiner sein.

In Übereinstimmung mit *Rosenberg und Schuermann* zeigte sich in dieser Studie, dass die Abweichungen der Risikoschätzer sehr sensitiv auf eine Änderung des Marktpreisrisikoanteils am Gesamttrisiko-Exposure reagierten. Insbesondere Kreditinstitute mit höheren Handelsaktivitäten und einem dementsprechend höheren Anteil an Marktpreisrisiken stehen damit vor größeren Herausforderungen bei der Berechnung eines präzisen Risikoschätzers. Die Sensitivität zum Anteil des operationellen Risikos konnte im Rahmen der Stresstestbetrachtung, mit Ausnahme für den Varianz-Kovarianz-Ansatz, jedoch nicht in dem Ausmaß bestätigt werden. Dies könnte an der unterschiedlichen Herangehensweise zur Modellierung des operationellen Risikos liegen.<sup>235</sup>

---

<sup>232</sup> Vgl. Rosenberg, J., Schuermann, T., *Integrated Risk Management*, 2006, S. 604; Li, J. et al., *Aggregation*, 2015, S. 181.

<sup>233</sup> Vgl. Li, J. et al., *Aggregation*, 2015, S. 186.

<sup>234</sup> Randverteilungen und die Gesamtverteilung entsprechen dem gleichen elliptischen Verteilungstyp. Vgl. Kapitel 4.1.

<sup>235</sup> S. dazu: Rosenberg, J., Schuermann, T., *Integrated Risk Management*, 2006, S. 571, 602.



Das verwendete Aggregationsverfahren hat insbesondere bei den aufsichtlich vorgegebenen hohen Konfidenzniveaus einen signifikanten Einfluss auf die Abweichung der Risikoschätzer zum tatsächlichen Risiko und damit auch auf die absolut gemessene Risikohöhe.<sup>236</sup> Bezogen auf das Ziel internes Kapital einzusparen, sind die konservativen Copula-Modelle, die über die maximal beobachteten Rangkorrelationen parametrisiert wurden, sehr interessant, da diese im Stresstestszenario in vielen Fällen die präzisesten Schätzer lieferten. Das Gauß-Copula-Modell generierte dabei durchweg niedrigere Risikoschätzer als das t-Copula-Modell. Dies ist auf die spezifischen Randabhängigkeiten der Copula-Funktion zurückzuführen. Je stärker die Randabhängigkeit der verwendeten Copula, desto wahrscheinlicher ist das gemeinsame Auftreten von Extremereignissen. Die t-Copula besitzt eine stärkere Randabhängigkeit als die randunabhängige Gauß-Copula. Folglich sind die aus dem t-Copula-Modell resultierenden Risikomaße größer.<sup>237</sup>

Insbesondere bei Nutzung des Expected Shortfalls als Risikomaß konnten die Copula-Modelle eine Unterschätzung nicht zuverlässig in jeder Situation verhindern. Bei Verwendung des Value-at-Risk hingegen wiesen die Schätzer nur vereinzelt in Grenzbereichen der verwendeten Parameter Unterschätzungen auf. Die ansonsten auftretenden Überschätzungen waren jedoch gerade bei Verwendung der Gauß-Copula-Modelle sehr gering. Die Schätzer weisen daher keine großen Puffer auf. Diese Eigenschaft ist bei der Absicht, möglichst viel ökonomisches Kapital einzusparen, förderlich. Es sollte aber berücksichtigt werden, dass nur in der Stresstestbetrachtung ein direkter Vergleich mit dem Risiko der Ausgangszeitreihe möglich ist. Unter realen Bedingungen fällt diese Möglichkeit weg. Zudem bestand die simulierte Ausgangszeitreihe aus 10.000 Beobachtungen. Die Ausgangsdatenbasis in der Realität dürfte regelmäßig niedriger ausfallen. Daher ist ein kleiner Puffer vorteilhaft, um eine Unterschätzung zuverlässig auszuschließen.

Die in der Studie von *Rosenberg und Schuermann* implizit aufgezeigte Einsparmöglichkeit um mehr als 40 % bei Verwendung eines Gauß-Copula-Modells<sup>238</sup> konnte in dieser Stressteststudie nicht in dieser Höhe bestätigt werden. Bei Spezifikation dieses Modells an der Gesamtzeitreihe konnten insbesondere bei höheren Marktpreisrisikoanteilen am Gesamtrisiko-Exposure durchaus Einsparun-

---

<sup>236</sup> S. dazu: Li, J. et al., *Aggregation*, 2015, S. 181.

<sup>237</sup> Vgl. Li, J. et al., *Aggregation*, 2015, S. 180.

<sup>238</sup> S. dazu: Rosenberg, J., Schuermann, T., *Integrated Risk Management*, 2006, S. 612.

gen in einer Größenordnung von 15 % erzielt werden, die jedoch zu einem großen Teil auf der Unterschätzung des Risikos beruhen. Dieses Einsparpotential deckt sich ungefähr mit den Ergebnissen in den Studien von *Kuritzkes et al.* und *Dimakos und Aas*.<sup>239</sup>

Die konservativ spezifizierten Modelle können hiermit nicht mithalten. Bei Verwendung des konservativen Gauß-Copula-Modells und des 99,9 % VaR zeigten sich im Stresstestszenario Einsparmöglichkeiten von gerade einmal ca. 1,6 %. Der Einsatz des t-Copula-Modells erzeugte Einsparungen gegenüber der einfachen Addition in Höhe von rund 0,5 %. Die Einsparung des konservativen Varianz-Kovarianz-Ansatzes kann hier durchaus mit ebenfalls ca. 0,5 % mithalten. Auch eine Erhöhung des Marktpreisrisikoanteils sorgte nicht für deutlich höhere Werte. Etwas höhere Einsparungen ließen sich hingegen bei der Verwendung der Copula-Modelle und konservativeren Konfidenzniveaus erzielen (z. B. 99,97 %: ca. 2,7 % (t-Copula-Modell) und knapp 3 % (Gauß-Copula-Modell)).

Die konservativen Schätzer bei Nutzung des Expected Shortfalls waren insgesamt betrachtet präziser, sodass ein höheres Einsparpotential im Vergleich zur einfachen Addition vorlag. Alle Copula-Modelle haben das Risiko zum 99,9 % Konfidenzniveau jedoch in diesem Stresstestszenario durchweg unterschätzt. Die Unterschätzung der konservativen Copula-Modelle war dabei fast genau so groß wie die Überschätzung des konservativen Varianz-Kovarianz-Ansatzes. Zudem ist zu beachten, dass der Wert der Risikomaße in beiden Fällen absolut betrachtet höher als bei Verwendung des 99,9 % VaR ist. Die Einsparungen bei Verwendung des VKA mit dem ES als Risikomaß sind nahezu identisch zu denen bei Nutzung des VaR.

Die hier dargestellten Einsparpotentiale beruhen auf einem Stresstestszenario. Somit stellt die absolute Höhe der aufgezeigten Einsparpotentiale nur einen ersten Anhaltspunkt dar. Folglich können in der Praxis durchaus höhere Einsparungen auftreten. Es kann dennoch festgehalten werden, dass die Berücksichtigung der aufsichtlichen Konservativitätsanforderung den erzielbaren Diversifikationseffekt regelmäßig in einem erheblichen Ausmaß begrenzen wird.

---

<sup>239</sup> Vgl. Kuritzkes, A. et al., *Capital Adequacy*, 2001, S. 22; Dimakos, X., Aas, K., *Risk modelling*, 2004, S. 275 f.

## 6 Zusammenfassung und Fazit

Sowohl Varianz-Kovarianz-Ansätze als auch Copula-Modelle sind grundsätzlich geeignet, getrennt quantifizierte Risiken zusammenzufassen und auf eine Kennzahl zu verdichten. Zum jetzigen Zeitpunkt besitzen jedoch beide Verfahren erhebliche Nachteile, die gerade auch vor dem Hintergrund der hohen aufsichtlichen Anforderungen gegen eine Verwendung in bankaufsichtlichen Risikotragfähigkeitskonzepten sprechen. So müssen beide Verfahren auf Konzepte zur Messung von Abhängigkeiten zurückgreifen. Dadurch entsteht ein Modellrisiko.

Das theoretische Fundament der Varianz-Kovarianz-Ansätze ist aufgrund der unrealistischen multivariaten Normalverteilungsannahme angreifbar. Bei Verletzung dieser für den Ansatz elementaren Annahme kann dies zu einer Verzerrung des quantifizierten Gesamtrisikos führen.<sup>240</sup> Die einfache Addition als Spezialfall des Varianz-Kovarianz-Ansatzes bildet die obere Grenze des Gesamtrisikos im Rahmen der Risikoaggregation, sofern in der Risikoquantifizierung alle Risikotreiber der einzelnen Positionen vollständig erfasst wurden.<sup>241</sup>

Im Rahmen des Stresstests erwiesen sich die Schätzer aus den Varianz-Kovarianz-Ansätzen durchaus auch in Krisenzeiten als stabil. Eine Unterschätzung des Gesamtbankrisikos konnte bei einer konservativen Ermittlung der Korrelationen ausgeschlossen werden. Eine mögliche Einsparung gegenüber der einfachen Addition bei Verwendung der konservativen Korrelationen hält sich aber in Grenzen.

Eine (vermeintlich) höhere Präzision durch eine flexiblere Modellierung mit Hilfe eines Copula-Modells wird durch höheren Parametrisierungsaufwand und die Aufgabe der konzeptionellen Einfachheit und damit leichten Zugänglichkeit erkaufte. Insbesondere die Unsicherheit bei der Wahl der Copula und der Schätzung der Parameter sorgt auch bei diesem Verfahren für ein nicht zu unterschätzendes Modellrisiko, welches die Nutzbarkeit in der Praxis stark einschränkt.<sup>242</sup>

Im Stresstest lieferten die konservativ spezifizierten Copula-Modelle die präzisen Schätzer, eine Unterschätzung des Gesamtbankrisikos konnte jedoch nicht in jedem Fall ausgeschlossen werden. Das Einsparpotential ist zwar höher als

---

<sup>240</sup> S. dazu: Rosenberg, J., Schuermann, T., *Integrated Risk Management*, 2006, S. 576.

<sup>241</sup> S. dazu: Li, J. et al., *Aggregation*, 2015, S. 181.

<sup>242</sup> S. dazu: Wehn, C., von Zanthier, U., *Ökonomische Kapitalsteuerung*, 2012, S. 170.

beim Varianz-Kovarianz-Ansatz, Einsparungen von 40 % und mehr<sup>243</sup> sind jedoch auch bei Verwendung der Copula-Modelle aufgrund der Konservativitätsanforderung unrealistisch.

Bei der hier durchgeführten Stresstestbetrachtung ist zu berücksichtigen, dass die Ausgangsdaten simuliert wurden. Diese Laborbedingungen können die Ergebnisse verzerrt haben.<sup>244</sup> Insofern sollten zukünftige Studien an Realdaten folgen.

Unabhängig vom genutzten Ansatz ist die Einsparung von ökonomischem Kapital in den bankaufsichtlichen Risikotragfähigkeitskonzepten ohnehin theoretischer Natur. Die Risikotragfähigkeit darf aufgrund der aufsichtlichen Vorgaben nicht alleine durch den Ansatz der Diversifikationseffekte sichergestellt sein. Deshalb müssen alle quantifizierten wesentlichen Risiken auch beim Einsatz von Aggregationsmodellen weiterhin in voller Höhe durch ökonomisches Kapital gedeckt sein. Die SREP-Kapitalzuschläge für weitere wesentliche Risiken werden zudem immer anhand der vollständig aufsummierten Risikobeträge ohne Anrechnung von Diversifikationseffekten bestimmt. Hierdurch können die Diversifikationseffekte nicht mit der beabsichtigten Intention (Einsparung von ökonomischem Kapital) im aufsichtlichen Risikotragfähigkeitskonzept angesetzt werden. Ausgewiesene Diversifikationseffekte können nur einen zusätzlichen Puffer darstellen. Die Einführung von Aggregationsmodellen kann zudem die Fehlallokation von Kapital in einer Bank verhindern, da die berücksichtigten Diversifikationseffekte eine genauere Gesamtbanksteuerung ermöglichen. Hierfür sind aber ausreichend lange Zeitreihen notwendig.

Sowohl Varianz-Kovarianz-Ansätze als auch Copula-Modelle versuchen lediglich, die Schwächen einer getrennten Risikosteuerung und -messung auszugleichen. Durch die Aggregation der einzelnen Risikoarten entsteht kein Gesamtrisikomodell. Der Einsatz eines Modells zur Risikoaggregation ist zum aktuellen Zeitpunkt nicht zu empfehlen, da die Verwendung mit hohen Modellrisiken verbunden ist und in den Risikotragfähigkeitskonzepten kein ökonomisches Kapital eingespart werden kann.

---

<sup>243</sup> Vgl. Rosenberg, J., Schuermann, T., *Integrated Risk Management*, 2006, S. 612.

<sup>244</sup> S. dazu: Weiß, G., *Copula-GARCH-Modelle*, 2011, S. 572.

## Literaturverzeichnis

- Aas, Kjersti, Dimakos, Xeni K., Øksendal, Anders (Aggregation, 2005): Risk Capital Aggregation, Note No. SAMBA/40/05, Oslo: Norwegian Computing Center, Dezember 2005
- Adams, Zeno, Füss, Roland, Glück, Thorsten (Correlations, 2017): Are correlations constant? Empirical and theoretical results on popular correlation models in finance, in: Journal of Banking and Finance, 84 (2017), S. 9–24
- Artzner, Philippe, Delbaen, Freddy, Eber, Jean-Marc, Heath, David (Kohärente Risikomaße, 1999): Coherent measures of risk, in: Mathematical Finance, 9 (1999), Nr. 6, S. 203–228
- Auerbach, Dirk (Bankenaufsicht, 2015): Banken- und Wertpapieraufsicht, München: Verlag C.H. Beck, 2015
- BaFin [Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht] (Anschreiben Leitfaden, 2011): Aufsichtliche Beurteilung bankinterner Risikotragfähigkeitskonzepte, Geschäftszeichen: BA 54-K 3000-2010/0006, Schreiben an alle Kreditinstitute vom 07.12.2011
- (Leitfaden, 2011): Aufsichtliche Beurteilung bankinterner Risikotragfähigkeitskonzepte, 07.12.2011, Anlage zum Schreiben vom 07.12.2011
  - (Anschreiben Leitfaden, 2018): Aufsichtliche Beurteilung bankinterner Risikotragfähigkeitskonzepte; Veröffentlichung der Endfassung des aufsichtlichen Leitfadens, Geschäftszeichen: BA 54-FR 2210-2018/0004, Schreiben an die Verbände der Kreditwirtschaft vom 24.05.2018
  - (Leitfaden, 2018): Aufsichtliche Beurteilung bankinterner Risikotragfähigkeitskonzepte und deren prozessualer Einbindung in die Gesamtbanksteuerung („ICAAP“) – Neuausrichtung, 24.05.2018, Anlage zum Schreiben vom 24.05.2018
  - (MaRisk, 2017): Mindestanforderungen an das Risikomanagement – MaRisk, Rundschreiben 09/2017 (BA) vom 27.10.2017
  - (MaRisk-Erläuterungen, 2017): Anlage 1: Erläuterungen zu den MaRisk in der Fassung vom 27.10.2017
- Bartetzky, Peter (Hrsg.) (Gesamtbanksteuerung, 2012): Praxis der Gesamtbanksteuerung – Methoden – Lösungen – Anforderungen der Aufsicht, Stuttgart: Schäffer-Poeschel Verlag, 2012

- BCBS [Basel Committee on Banking Supervision] (Basel II, 2004): Internationale Konvergenz der Eigenkapitalmessung und der Eigenkapitalanforderung – Überarbeitete Rahmenvereinbarung, Basel: Bank für Internationalen Zahlungsausgleich, Juni 2004
- (Economic Capital, 2009): Range of practices and issues in economic capital frameworks, Basel: Bank für Internationalen Zahlungsausgleich, März 2009
  - (Interaction, 2009): Findings on the interaction of market and credit risk, Working Paper No. 16, Basel: Bank für Internationalen Zahlungsausgleich, Mai 2009
  - (Risk Aggregation, 2010): Joint Forum – Developments in Modelling Risk Aggregation, Basel: Bank für Internationalen Zahlungsausgleich, Oktober 2010
  - (Marktrisiko, 2016): Minimum capital requirements for market risk, Basel: Bank für Internationalen Zahlungsausgleich, Januar 2016
  - (Basel III, 2017): Basel III: Finalising post-crisis reforms, Basel: Bank für Internationalen Zahlungsausgleich, Dezember 2017
- Beck, Andreas, Lesko, Michael, Schlottmann, Frank, Wimmer, Konrad (Copulas, 2006): Copulas im Risikomanagement, in: Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen, 59 (2006), Nr. 14, S. 727–731
- Becker, Axel (Hrsg.) (Risikotragfähigkeit, 2014): Bearbeitungs- und Prüfungsleitfaden Risikotragfähigkeit im Fokus der Bankenaufsicht, 3. Aufl., Heidelberg: Finanz Colloquium Heidelberg, 2014
- Bissantz, Nicolai, Daniel Ziggel, Bissantz, Kathrin (Correlation, 2011): An Empirical Study of Correlation and Volatility Changes of Stock Indices and their Impact on Risk Figures, in: Acta Universitatis Danubius – Oeconomica, 7 (2011), Nr. 4, S. 127–141
- Böcker, Klaus (Quantifying Risk, 2008): Quantifying Risk: Modelling and Estimation, München, 2008 [Dissertation Technische Universität München – vervielf.]
- Böcker, Klaus, Hillebrand, Martin (Risk Aggregation, 2008): Interaction of market and credit risk: an analysis of inter-risk correlation and risk aggregation, in: Deutsche Bundesbank (Hrsg.), Discussion Paper Series 2: Banking and Financial Studies, Nr. 11 (2008), S. 9–29
- Brandtner, Mario (Risikomessung, 2010): Risikomessung mit kohärenten, spektralen und konvexen Risikomaßen – Konzeption, entscheidungstheoretische Implikationen und finanzwirtschaftliche Anwendungen, Wiesbaden: Springer Gabler, 2010 [Dissertation Universität Jena]

- Brockmann, Michael, Kalkbrenner Michael (Aggregation, 2010): On the Aggregation of Risk, in: *The Journal of Risk*, 12 (2010), Nr. 3, S. 45–68
- Broll, Udo, Förster, Andreas (VaR, 2017): Finanzkrisen und Gläubigerschutz: Die Kennzahl Value at Risk, in: *Das Wirtschaftsstudium*, 46 (2017), Nr. 1, S. 101–108
- Bruneton, Jean-Philipp (Hierarchical Aggregation, 2011): Copula-based Hierarchical Aggregation of Correlated Risk. The behaviour of the diversification benefit in Gaussian and Lognormal Tress, Namur, 11.11.2011
- Campbell, Rachel A. J., Forbes, Catherine S., Koedijk, Kees G., Kofman, Paul (Correlation, 2007): Increasing correlations or just fat tails?, in: *Journal of Empirical Finance*, 15 (2008), Nr. 2, S. 287–309
- CEBS [Committee of European Banking Supervisors] (Position Paper, 2010): CEBS's position paper on the recognition of diversification benefits under Pillar 2, London, 02.09.2010
- Cherubini, Umberto, Gobbi, Fabio, Mulinacci, Sabrina, Romagnoli, Silvia (Copula, 2012): *Dynamic copula methods in finance*, West Sussex: John Wiley & Sons Ltd, 2012
- Cherubini, Umberto, Luciano, Elisa, Vecchiato Walter (Copula, 2004): *Copula methods in finance*, West Sussex: John Wiley & Sons Ltd, 2004
- Cottin, Claudia, Döhler, Sebastian (Risikoanalyse, 2009): *Risikoanalyse – Modellierung, Beurteilung und Management von Risiken mit Praxisbeispielen*, Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2009
- Dempster M.A.H. (Hrsg.) (Dependence, 2002): *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, Cambridge et al.: Cambridge University Press, 2002
- Deutsche Bundesbank (Hrsg.) (Risk Aggregation, 2008): *Discussion Paper Series 2: Banking and Financial Studies*, Nr. 11 (2008), Frankfurt am Main
- Deutsche Bundesbank (Range of Practice, 2010): "Range of Practice" zur Sicherstellung der Risikotragfähigkeit bei deutschen Kreditinstituten, Frankfurt am Main, 11.11.2010
- (Monatsbericht RTF, 2013): Bankinterne Methoden zur Ermittlung und Sicherstellung der Risikotragfähigkeit und ihre bankaufsichtliche Bedeutung, in: *Monatsbericht*, 65 (2013), Nr. 3, S. 31–45
- Dimakos, Xeni K., Aas, Kjersti (Risk modelling, 2004): Integrated risk modelling, in: *Statistical Modelling*, 4 (2006), Nr. 4, S. 265–277

- EBA [European Banking Authority] (SREP Leitlinie, 2014): Leitlinien zu gemeinsamen Verfahren und Methoden für den aufsichtlichen Überprüfungs- und Bewertungsprozess (SREP), EBA/GL/2014/13, 19.12.2014  
– (Compliance Table, 2015): Compliance Table – Guidelines, EBA/GL/2014/13 Appendix 1, 14.09.2015
- Embrechts, Paul, McNeil, Alexander J., Straumann, Daniel (Dependence, 2002): Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls in: Dempster M.A.H. (Hrsg.), Risk Management: Value at Risk and Beyond, 2002, S. 176–223
- van Emmerich, Cathrin (Correlation, 2009): A Square Root Process for Modelling Correlation, 2009 [Dissertation Bergische Universität Wuppertal – vervielf.]
- EZB [Europäische Zentralbank] (Leitfaden zum ICAAP, 2017): Anlage: SSM-Leitfaden zum ICAAP, offener Brief an die Geschäftsleitung bedeutender Institute: Mehrjahresplan für die SSM-Leitfäden zum ICAAP und zum ILAAP, Frankfurt am Main, 20.02.2017
- Fahrmeir, Ludwig, Künstler, Rita, Pigeot, Iris, Tutz, Gerhard (Statistik, 2011): Statistik – Der Weg zur Datenanalyse, 7. Aufl., Heidelberg: Springer, 2011
- FMA [Österreichische Finanzmarktaufsicht], ÖNB [Österreichische Nationalbank] (Quantitative Modelle, 2004): Neue quantitative Modelle der Bankenaufsicht, Wien: Österreichische Nationalbank, 2004
- Forbes, Kristin J., Rigobon, Roberto (Interdependence, 2002): No Contagion, Only Interdependence: Measuring Stock Market Comovements, in: The Journal of Finance, 57 (2002), Nr. 5, S. 2223–2261
- Geiersbach, Karsten, Walter, Bernd (Hrsg.) (Stresstest, 2012): Praktikerhandbuch Stresstesting, 2. Aufl., Heidelberg: Finanz Colloquium Heidelberg, 2012
- Großmann, Stefan (Stresstests, 2006): Aktuelle stochastische Methoden zur Anwendung im Rahmen von Stresstests, in: Klauck, Kai-Oliver, Stegmann, Claus (Hrsg.), Stresstests in Banken – Von Basel II bis ICAAP, 2006, S. 71–98
- Guegan, Dominique, Zhang, Jing (Dynamic Copula, 2006): Change analysis of dynamic copula for measuring dependence in multivariate financial data, Working Paper, Centre d’Economie de la Sorbonne, Paris: Université Paris, 2006



- Handschuer, Nicole (Modellrisiken, 2015): Modellrisiken in der Risikoaggregation der RTF, in: Heithecker, Dirk und Tschuschke, Dennis (Hrsg.), Bearbeitungs- und Prüfungsleitfaden Management von Modellrisiken, 2015, S. 391–403
- Hannemann, Ralf, Schneider, Andreas, Weigl, Thomas (MaRisk-Kommentar, 2013): Mindestanforderungen an das Risikomanagement – Kommentar unter Berücksichtigung der Instituts-Vergütungsverordnung (InstitutsVergV), 4. Aufl., Stuttgart: Schäffer-Poeschel Verlag, 2013
- Heithecker, Dirk und Tschuschke, Dennis (Hrsg.) (Modellrisiken, 2015): Bearbeitungs- und Prüfungsleitfaden Management von Modellrisiken, Heidelberg: Finanz Colloquium Heidelberg, 2015
- Heuter, Henning, Igl, Andreas (Hrsg.) (ICAAP, 2015): Risiko Manager – Handbuch ICAAP, Köln: Bank Verlag, 2015
- Hlawatsch, Stefan, Reichling, Peter (Copula, 2010): Konstruktion und Anwendung von Copulas in der Finanzwirtschaft, Working Paper No. 16/2010, Magdeburg: Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 2010
- Hull, John C. (Risikomanagement, 2016): Risikomanagement – Banken, Versicherungen und andere Finanzinstitutionen, 4. Aufl., Hallbergmoos: Pearson Deutschland GmbH, 2016
- Inanoglu, Hulusi, Jacobs, Michael (Risk Aggregation, 2009): Models for Risk Aggregation and Sensitivity Analysis: an Application to Bank Economic Capital, in: Journal of Risk and Financial Management, 2 (2009), S. 118–189
- Klein, Alexander, Synatschke-Czerwonka, Franziska, Oest, Thorsten, Glößner, Peter (Risikoaggregation, 2014): Ökonomische und statistische Konservativität in der Risikoaggregation, in: Risiko-Manager, 2014, Nr. 16, S. 18–26
- Klauck, Kai-Oliver, Stegmann, Claus (Hrsg.) (Stresstests, 2006): Stresstests in Banken – Von Basel II bis ICAAP, Stuttgart: Schäffer-Poeschel Verlag, 2006
- Kuritzkes, Andrew, Schuermann, Til, Weiner, Scott (Capital Adequacy, 2001): Study on the Risk Profile and Capital Adequacy of Financial Conglomerates, London u. a.: Oliver Wyman & Company, Februar 2001
- Li, Jianping, Zhu, Xiaoqian, Lee, Cheng-Few, Wu, Dengsheng, Feng, Jichuang, Shi, Yong (Aggregation, 2015): On the aggregation of credit, market and operational risks, in: Review of Quantitative Finance and Accounting, 44 (2015), Nr. 1, S. 161–189

- Longin, François, Solnik, Bruno (Correlation, 1995): Is the correlation in international equity returns constant: 1960-1990?, in: *Journal of International Money and Finance*, 14 (1995), Nr. 1, S. 3–26
- Mai, Jan-Frederik, Scherer, Matthias (Abhängigkeiten, 2012): Modellierung von Abhängigkeiten. Die Welt ist nicht normal(verteilt), in: *Risiko-Manager*, 2012, Nr. 25/26, S. 1, 6–11
- Markowitz, Harry (Portfolio Selection, 1952): Portfolio Selection, in: *The Journal of Finance*, 7 (1952), Nr. 1, S. 77–91
- McNeil, Alexander J., Frey, Rüdiger, Embrechts, Paul (QRM, 2005): *Quantitative Risk Management – Concepts, Techniques and Tools*, Princeton und Oxford: Princeton University Press, 2005
- Mitschele, Andreas (Integriertes Risikomanagement, 2009): *Intelligente Methoden im Integrierten Risikomanagement*, Karlsruhe: Universitätsverlag Karlsruhe, 2009 [Dissertation Universität Karlsruhe]
- Mondello, Enzo (Portfoliomanagement, 2015): *Portfoliomanagement – Theorie und Anwendungsbeispiele*, 2. Aufl., Wiesbaden: Springer Gabler, 2015
- Nelsen, Roger B. (Copula, 2006): *An Introduction to Copulas*, 2. Aufl., New York: Springer, 2006
- Patton, Andrew J. (Dependence, 2006): Modelling asymmetric exchange rate dependence, in: *International Economic Review*, 47 (2006), Nr. 2, S. 527–556
- Pérignon, Christophe, Smith, Daniel R. (Diversification, 2010): Diversification and Value-at-Risk, in: *Journal of Banking & Finance*, 34 (2010), Nr. 1, S. 55–66
- Reuse, Svend (Korrelationen, 2011): *Korrelationen in Extremsituationen – Eine empirische Analyse des deutschen Finanzmarktes mit Fokus auf irrationales Marktverhalten*, Wiesbaden: Gabler Verlag, 2011 [Dissertation Masaryk Universität Brunn]
- (Diversifikationseffekte, 2016): Kritische Analyse risikomindernder Diversifikationseffekte, in: Reuse, Svend (Hrsg.), *Praktikerhandbuch Risikotragfähigkeit*, 2016, S. 307–336
- Reuse, Svend (Hrsg.) (Diversifikationseffekte, 2016): *Praktikerhandbuch Risikotragfähigkeit*, 2. Aufl., Heidelberg: Finanz Colloquium Heidelberg, 2016
- Rockinger, Michael, Jondeau, Eric (Dependence, 2001): *Conditional Dependency of Financial Series: An Application of Copulas*, Notes d'études et de recherche, Paris: Banque de France, Februar 2001

- Rodriguez, Juan Carlos (Contagion, 2007): Measuring financial contagion: A Copula approach, in: *Journal of Empirical Finance*, 14 (2007), Nr. 3, S. 401–423
- Rosenberg, Joshua V., Schuermann, Til (Integrated Risk Management, 2004): A general approach to integrated risk management with skewed, fat-tailed risks, in: Federal Reserve Bank of New York, Staff Report No. 185, Mai 2004
- (Integrated Risk Management, 2006): A general approach to integrated risk management with skewed, fat-tailed risks, in: *Journal of Financial Economics*, 79 (2006), Nr. 3, S. 569–614
- Saita, Francesco (Aggregation, 2004): Risk Capital Aggregation: the Risk Manager's Perspective, Mailand, September 2004
- Schmidt, Thorsten (Copula, 2006): Coping with Copulas, Working Paper, Department of Mathematics, Leipzig: University of Leipzig, Dezember 2006
- Seuthe, Andreas (Risikotragfähigkeit, 2014): Sicherstellung und Monitoring der Risikotragfähigkeit aus Sicht der Bankenaufsicht, in: Becker, Axel (Hrsg.), Bearbeitungs- und Prüfungsleitfaden Risikotragfähigkeit im Fokus der Bankenaufsicht, 2014, S. 125–200
- Skoglund, Jimmy, Erdman, Donald, Chen, Wei (Hierarchical Copulas, 2013): A mixed approach to risk aggregation using hierarchical copulas, in: *Journal of risk management in financial institutions*, 6 (2013), Nr. 2, S. 188–205
- Spielberg, Holger, Becher, Florian (Diversifikation, 2013): Welche Risikoaggregationsmethode ist MaRisk-konform?, in: *Die Bank*, 2013, Heft 04, S. 30–34
- Walter, Bernd (Stresstest, 2012): Grundlagen, in: Geiersbach, Karsten, Walter, Bernd (Hrsg.), *Praktikerhandbuch Stresstesting*, 2012, S. 7–26
- Wehn, Carsten S. (ICAAP, 2015): Die Rolle des Risikohorizonts im ICAAP am Beispiel Marktrisiko, in: Heuter, Henning, Igl, Andreas (Hrsg.), *Risiko Manager – Handbuch ICAAP*, 2015, S. 113–134
- Wehn, Carsten S., von Zanthier, Ulrich (Ökonomische Kapitalsteuerung, 2012): Risikosteuerung im Rahmen der ökonomischen Kapitalsteuerung, in: Bartetzky, Peter (Hrsg.), *Praxis der Gesamtbanksteuerung – Methoden – Lösungen – Anforderungen der Aufsicht*, 2012, S. 163–177
- Weiß, Gregor Nikolaus Felix (Parameter Estimation, 2010): Copula parameter estimation: numerical considerations and implications for risk management, in: *The Journal of Risk*, 13 (2010), Nr. 1, S. 17–53

- Weiß, Gregor Nikolaus Felix (Copula-GARCH-Modelle, 2011): Über die Vorteilhaftigkeit von Copula-GARCH-Modellen im finanzwirtschaftlichen Risikomanagement, in: Kredit und Kapital, 44 (2011), Nr. 4, S. 543–577
- Wiesemann, Hans-Olaf (Risikostreuung, 2011): Diversifikationseffekt – Eigenkapitalersparnis durch Risikostreuung, in: Wirtschaftswissenschaftliches Studium, 40 (2011), Nr. 8, S. 424–426
- Wolfgang, Alexander (Risikomanagement, 2008): Risikomanagement für Finanz- und Kapitalmärkte, Wien: LexisNexis Verlag, 2008
- Wrede, Irmhild (Ausfallwahrscheinlichkeiten, 2008): Ökonomische Auswirkungen von Schätzfehlern bei der bankinternen Bestimmung von Kreditausfallwahrscheinlichkeiten, Wiesbaden: Gabler Verlag, 2008 [Dissertation Universität Münster]
- Wüst, Kirsten (Risikomanagement, 2014): Risikomanagement – Eine Einführung mit Anwendung in Excel, Konstanz und München: UVK Verlagsgesellschaft mbH, 2014
- Yan, Jun (Package copula, 2007): Enjoy the Joy of Copulas: With a Package copula, in: Journal of Statistical Software, 21 (2007), Nr. 4, S. 1–21
- Yener, Tina (Risk Management, 2012): Risk Management Beyond Correlation, Berlin: Pro BUSINESS, 2012 [Dissertation Ludwig-Maximilians-Universität München]
- Yoshiba, Toshinao (Risk Aggregation, 2013): Risk Aggregation by a Copula with a Stressed Condition, Working Paper Series Nr. 13-E-12 (2013), Tokio: Bank of Japan, 2013
- Zimmermann, Hans, Drobetz, Wolfgang, Oertmann, Peter (Asset Allocation, 2003): Global Asset Allocation – New Methods and Applications, Hoboken: John Wiley & Sons Inc., 2003

## Internetquellen

- MathWork, Inc. (Dokumentation, 2017): t Location-Scale Distribution, MATLAB Documentation (keine Datumsangabe), [https://de.mathworks.com/help/stats/t-location-scale-distribution.html?s\\_tid=gn\\_loc\\_drop](https://de.mathworks.com/help/stats/t-location-scale-distribution.html?s_tid=gn_loc_drop), (Zugriff 2017-12-17, 15:00 MEZ)
- Reinboth, Christian (Zusammenhangsmaße, 2016): Grundlagen der Statistik: Zusammenhangsmasse – die Korrelationskoeffizienten nach Spearman und Kendall (2016-12-24), <http://wissenschafts-thurm.de/grundlagen-der-statistik-zusammenhangsmasse-die-korrelationskoeffizienten-nach-spearman-und-kendall/>, (Zugriff 2017-10-16, 22:56 MEZ)

## Gesetze und Verordnungen

Capital Requirements Regulation (CRR): Verordnung (EU) Nr. 575/2013 des Europäischen Parlaments und des Rates vom 26. Juni 2013 über Aufsichtsanforderungen an Kreditinstitute und Wertpapierfirmen und zur Änderung der Verordnung (EU) Nr. 648/2012, zuletzt geändert durch die Delegierte Verordnung (EU) 2017/2188 der Kommission vom 11. August 2017 (ABl. L 310, S. 1)

Capital Requirements Directive (CRD IV): Richtlinie 2013/36/EU des Europäischen Parlaments und des Rates vom 26.06.2013 über den Zugang zur Tätigkeit von Kreditinstituten und die Beaufsichtigung von Kreditinstituten und Wertpapierfirmen, zur Änderung der Richtlinie 2002/87/EG und zur Aufhebung der Richtlinien 2006/48/EG und 2006/49/EG, zuletzt berichtigt durch ABl. L 20 vom 25.01.2017, S. 1

Gesetz über das Kreditwesen (Kreditwesengesetz – KWG) vom 09.09.1998 (BGBl. I S. 2776) zuletzt geändert durch das Gesetz vom 17.07.2017 (BGBl. I S. 2446)



kostenloser Download  
unter [fom-ifes.de](http://fom-ifes.de)

Cox, P. / Lehrbass, F. (2018): Determinanten der Replikationsgüte von Exchange Traded Funds, in: Krol, B. (Hrsg.), ifes Schriftenreihe, Band 16, 2018, ISSN 2191-3366, ISBN 978-3-89275-407-7

Lehrbass, F. / Scheipers, N. (2017): Determinanten der Höhe von Wirtschaftsprüfungshonoraren am Beispiel von gelisteten Unternehmen im Prime Standard, in: Krol, B. (Hrsg.), ifes Schriftenreihe, Band 15, 2017, ISSN 2191-3366, ISBN 978-3-89275-406-0

Schwarz, J. (2017): Ergebnisse der Analyse von Studienabbrüchen, in: Krol, B. (Hrsg.), ifes Schriftenreihe, Band 14, 2017, ISSN 2191-3366, ISBN 978-3-89275-405-3

Lehrbass, F. (2016): Risikomessung für den globalen Kohlehandel: Einfache und fortgeschrittene Verfahren nebst Backtesting sowie ein Vergleich mit IFRS 7, in: Krol, B. (Hrsg.), ifes Schriftenreihe, Band 13, 2016, ISSN 2191-3366, ISBN 978-3-89275-404-6

Godbersen, H. (2016): Die Means-End Theory of Complex Cognitive Structures – Entwicklung eines Modells zur Repräsentation von verhaltensrelevanten und komplexen Kognitionstrukturen für die Wirtschafts- und Sozialwissenschaften, in: Krol, B. (Hrsg.), ifes Schriftenreihe, Band 12, 2016, ISSN 2191-3366, ISBN 978-3-89275-403-9

Seng, A. / Landherr, G. (2015): Vielfalt leben und Vielfalt gestalten – Diversity Management in der Lehre, in: Krol, B. (Hrsg.), ifes Schriftenreihe, Band 11, 2015, ISSN 2191-3366, ISBN 978-3-89275-402-2

- Gansser, O. A. / Schutkin, A. (2014): Studie zur Validierung der Persönlichkeitsmerkmale Abenteuerlust und Routineverhalten, in: Krol, B. (Hrsg.), ifes Schriftenreihe, Band 10, 2014, ISSN 2191-3366, ISBN 978-3-89275-401-5
- Gansser, O. A. (2014): Marketingplanung als Instrument zur Krisenbewältigung, in: Krol, B. (Hrsg.), ifes Schriftenreihe, Band 9, 2014, ISSN 2191-3366, ISBN 978-3-89275-400-8
- Runia, P. M. / Wahl, F. / Rüttgers, C. (2013): Das Markenimage von Hersteller- und Handelsmarken: Eine empirische Analyse der Imagekomponenten von Körperpflegemarken auf der Grundlage eines Markenidentitätskonzeptes, in: Krol, B. (Hrsg.), KCS Schriftenreihe, Band 8, 2013, ISSN 2191-3366
- Naskrent, J. / Rüttgers, C. (2013): Sportmonitor Essen 2013: Eine empirische Analyse über das Image regionaler Sportvereine und ihre Sponsoring- und Promotionangebote, in: Krol, B. (Hrsg.), KCS Schriftenreihe, Band 7, 2013, ISSN 2191-3366
- Seng, A. / Fiesel, L. / Rüttgers, C. (2013): Akzeptanz der Frauenquote, in: Krol, B. (Hrsg.), KCS Schriftenreihe, Band 6, 2013, ISSN 2191-3366
- Naskrent, J. / Rüttgers, C. (2012): Wahrnehmung von Werbung mit Sportereignisbezug: Eine empirische Analyse der Einschätzung von Sponsoring und Ambush-Marketing im Rahmen der Fußball-Europameisterschaft und der Olympischen Spiele im Jahr 2012, in: Krol, B. (Hrsg.), KCS Schriftenreihe, Band 5, 2012, ISSN 2191-3366
- Seng, A. / Fiesel, L. / Krol, B. (2012): Erfolgreiche Wege der Rekrutierung in Social Networks, in: Krol, B. (Hrsg.), KCS Schriftenreihe, Band 4, 2012, ISSN 2191-3366
- Heinemann, S. / Krol, B. (2011): Nachhaltige Nachhaltigkeit: Zur Herausforderung der ernsthaften Integration einer angemessenen Ethik in die Managementausbildung, in: Krol, B. (Hrsg.), KCS Schriftenreihe, Band 2, 2011, ISSN 2191-3366
- Hermeier, B. / Rettig, P. / Krol, B. (2010): Marken- und Produktmanagement durch Nutzung von Sportgroßereignissen: Möglichkeiten und Grenzen für Industrie und Handel, in: Krol, B. (Hrsg.), KCS Schriftenreihe, Band 1, 2010, ISSN 2191-3366

ISBN (Print) 978-3-89275-409-1  
ISBN (eBook) 978-3-89275-410-7

ISSN (Print) 2191-3366  
ISSN (eBook) 2569-5355



Institut für Empirie & Statistik  
der FOM Hochschule  
für Oekonomie & Management

## FOM Hochschule

## ifes

FOM. Die Hochschule. Für Berufstätige.

Die mit bundesweit über 46.000 Studierenden größte private Hochschule Deutschlands führt seit 1993 Studiengänge für Berufstätige durch, die einen staatlich und international anerkannten Hochschulabschluss (Bachelor/Master) erlangen wollen.

Die FOM ist der anwendungsorientierten Forschung verpflichtet und verfolgt das Ziel, adaptionsfähige Lösungen für betriebliche bzw. wirtschaftsnahe oder gesellschaftliche Problemstellungen zu generieren. Dabei spielt die Verzahnung von Forschung und Lehre eine große Rolle: Kongruent zu den Masterprogrammen sind Institute und KompetenzCentren gegründet worden. Sie geben der Hochschule ein fachliches Profil und eröffnen sowohl Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern als auch engagierten Studierenden die Gelegenheit, sich aktiv in den Forschungsdiskurs einzubringen.

Weitere Informationen finden Sie unter [fom.de](http://fom.de)

Das ifes verfolgt das Ziel, empirische Kompetenzen an der FOM zu bündeln und die angewandte Forschung im empirischen Bereich der Hochschule weiter voranzutreiben.

Drei Aufgabenbereiche bilden die Schwerpunkttätigkeiten: Zum einen unterstützt das ifes-Team die Hochschullehrenden der FOM bei der Kompetenzentwicklung im Bereich der empirischen Forschung und gewährleistet damit eine stetige Qualitätssicherung und die Einhaltung der Leitlinien der guten wissenschaftlichen Praxis im Rahmen von Forschungs- und Entwicklungsprojekten.

Zum anderen führt das ifes das Monitoring einer Zielgruppe von Berufstätigen im Rahmen von »FOM fragt nach«-Projekten durch. Im Rahmen dieser Projekte werden junge, berufstätige Leistungsträger/-innen mit Managementorientierung zu aktuellen ökonomischen Themen befragt, die teilweise als Panelbefragungen angelegt sind. Dadurch ist ein vielschichtiger Erkenntnisgewinn über eine in den nächsten Jahren stärker in die unternehmerische Verantwortung gehende Generation möglich.

Darüber hinaus nimmt das ifes eine zentrale Stellung im Bereich der Entwicklung und Unterstützung der Methodenausbildung in der Lehre der Bachelor- und Masterstudiengänge sowie im Promotionsprogramm der FOM ein.

Weitere Informationen finden Sie unter [fom-ifes.de](http://fom-ifes.de)



Unter dem Titel »FOM forscht« gewähren Hochschullehrende der FOM Einblicke in ihre Projekte. Besuchen Sie den Blog unter [fom-blog.de](http://fom-blog.de)